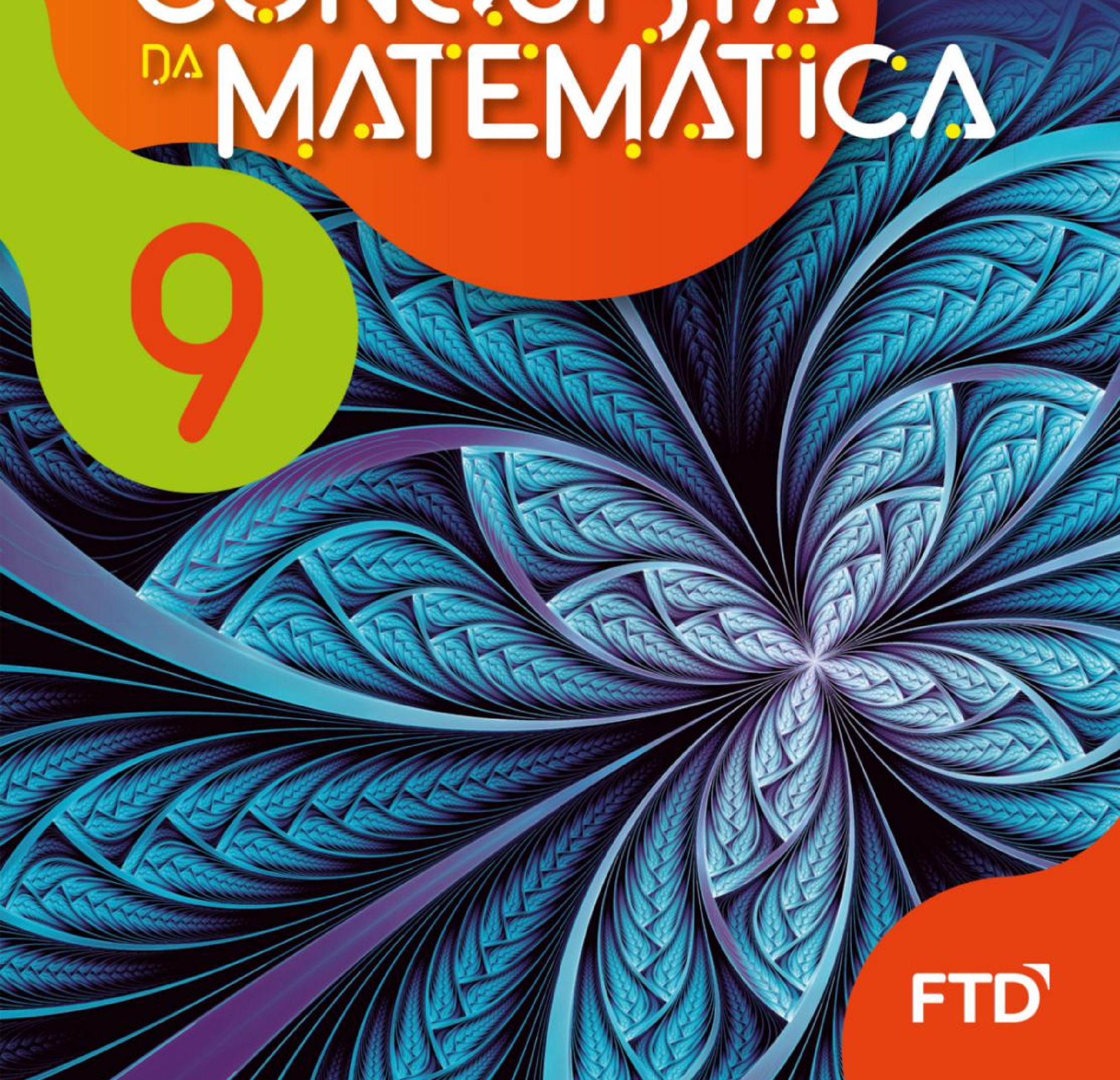
JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR
BENEDICTO CASTRUCCI

# A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

9



FTD

# A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

# 9

**JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR**
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
Professor e assessor de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

**BENEDICTO CASTRUCCI**
(Falecido em 2 de janeiro de 1995)
Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).
Foi professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) e da Universidade de São Paulo (USP).
Foi professor de Matemática em escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Ensino Fundamental – Anos Finais
Componente curricular: Matemática

FTD

4ª edição – São Paulo – 2018

FTD




| | |
|---|---|
| **Diretor editorial** | Antonio Luiz da Silva Rios |
| **Diretora editorial adjunta** | Silvana Rossi Júlio |
| **Gerente editorial** | Roberto Henrique Lopes da Silva |
| **Editor** | João Paulo Bortoluci |
| **Editores assistentes** | Carlos Eduardo Bayer Simões Esteves, Diana Santos, Eliane Cabariti Casagrande Lourenço, Janaina Bezerra Pereira, Juliana Montagner, Luís Felipe Porto Mendes, Marcos Antônio Silva, Tatiana Ferrari D'Addio |
| **Assessoria** | Cristiane Boneto, Francisco Mariani Casadore, Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura, Marcelo Eduardo Pereira, Patricia Furtado |
| **Gerente de produção editorial** | Mariana Milani |
| **Coordenador de produção editorial** | Marcelo Henrique Ferreira Fontes |
| **Gerente de arte** | Ricardo Borges |
| **Coordenadora de arte** | Daniela Máximo |
| **Projeto gráfico** | Carolina Ferreira, Juliana Carvalho |
| **Projeto de capa** | Sergio Cândido |
| **Foto de capa** | Bob Sacha/Getty Images |
| **Supervisora de arte** | Isabel Cristina Ferreira Corandin |
| **Editora de arte** | Dayane Santiago, Nadir Fernandes Racheti |
| **Diagramação** | Débora Jóia, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, José Aparecido A. da Silva, Lucas Trevelin |
| **Tratamento de imagens** | Ana Isabela Pithan Maraschin, Eziquiel Racheti |
| **Coordenadora de ilustrações e cartografia** | Marcia Berne |
| **Ilustrações** | Estúdio MW, Ilustra Cartoon, Marcos Guilherme, Paulo Manzi, Studio Caparroz |
| **Cartografia** | Allmaps, Renato Bassani, Sonia Vaz |
| **Coordenadora de preparação e revisão** | Lilian Semenichin |
| **Supervisora de preparação e revisão** | Maria Clara Paes |
| **Revisão** | Ana Lúcia Horn, Carolina Manley, Cristiane Casseb, Edna Viana, Giselle Mussi de Moura, Jussara R. Gomes, Kátia Cardoso, Lilian Vismari, Lucila V. Segóvia, Miyuki Kishi, Renato A. Colombo Jr., Solange Guerra, Yara Affonso |
| **Supervisora de iconografia e licenciamento de textos** | Elaine Bueno |
| **Iconografia** | Rosa André |
| **Licenciamento de textos** | Carla Marques, Vanessa Trindade |
| **Supervisora de arquivos de segurança** | Silvia Regina E. Almeida |
| **Diretor de operações e produção gráfica** | Reginaldo Soares Damasceno |

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Giovanni Júnior, José Ruy
A conquista da matemática : 9º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — 4. ed. — São Paulo : FTD, 2018.

"Componente curricular: Matemática."
ISBN 978-85-96-01919-4 (aluno)
ISBN 978-85-96-01920-0 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Castrucci, Benedicto. II. Título.

18-20689 CDD-372.7

**Índices para catálogo sistemático:**
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7
Cibele Maria Dias – Bibliotecária – CRB-8/9427




**EDITORA FTD.**
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br



Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

# APRESENTAÇÃO

Para que serve a Matemática? Por que aprender todo esse conteúdo de Matemática na escola? Essas são perguntas que um dia provavelmente passaram ou vão passar por sua cabeça.

A Matemática está presente em nossas vidas, desde uma simples contagem em uma brincadeira até nos modernos e complexos computadores. Ela ajuda a decidir se uma compra deve ser paga à vista ou a prazo, a entender o movimento da inflação e dos juros, a medir os índices de pobreza e riqueza de um país, a entender e cuidar do meio ambiente... sem falar nas formas e medidas, com suas aplicações na Arquitetura, na Arte e na agricultura.

Mas, apesar de estar presente em tantos momentos importantes das nossas vidas, pode parecer, a princípio, que alguns temas da Matemática não têm aplicação imediata, o que pode gerar certo desapontamento em você.

Na verdade, a aplicação da Matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes. Como em todas as áreas de estudo, para entender e fazer Matemática é necessário dedicação e estudo.

Nesta coleção, apresentamos a você as linhas mestras desse processo com uma linguagem simples, mas sem fugir ao rigor que a Matemática exige.

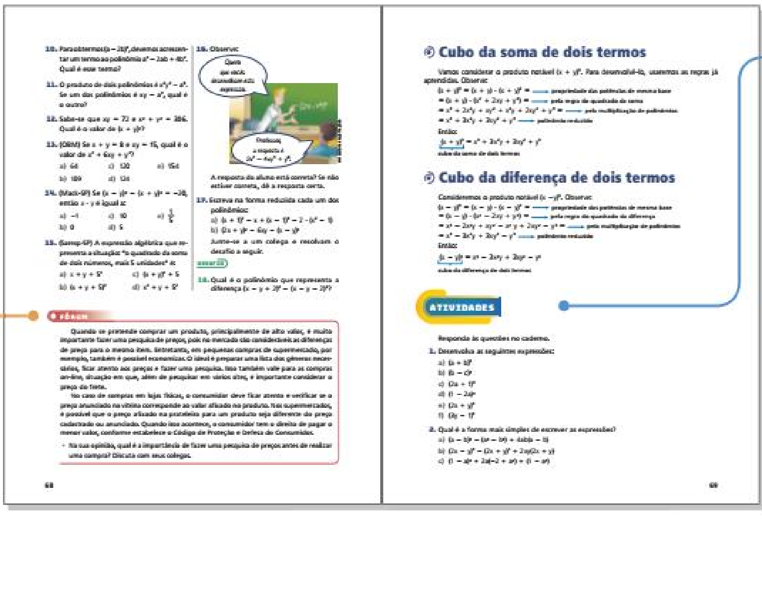
Vivemos hoje em um mundo em constante e rápida transformação, e a Matemática pode nos ajudar a entender essas transformações. Ficar à parte do conhecimento matemático é, hoje, estar à margem das mudanças do mundo. Então, vamos entender e fazer Matemática!

**Os autores**

# CONHEÇA SEU LIVRO

## ABERTURA DE UNIDADE

As páginas de abertura introduzem o trabalho que será desenvolvido em cada Unidade. Nelas, você é convidado a observar textos e/ou imagens e relacioná-los com seus conhecimentos sobre o tema ou com contextos que serão articulados pelas questões.

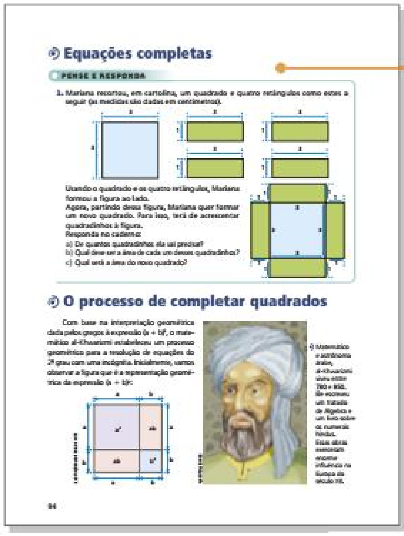




## FÓRUM

Traz questões para debate, em que você e os colegas poderão praticar estratégias de argumentação.

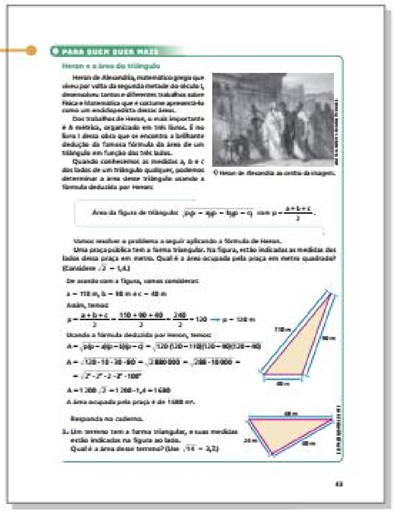
## ATIVIDADES

Os exercícios apresentados são variados e visam à prática do conteúdo aprendido. Por vezes você se deparará com exercícios mais desafiadores, inclusive o de elaborar seus próprios exercícios e compartilhá-los com seus colegas.



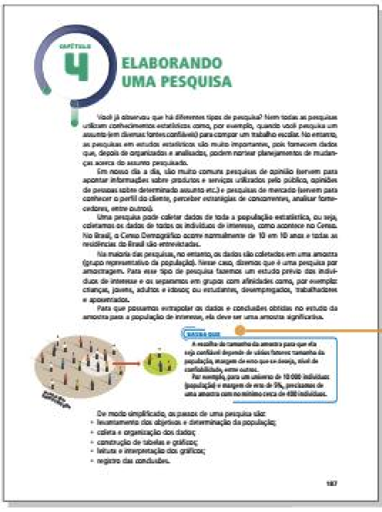
## PENSE E RESPONDA

As atividades apresentadas valorizam a construção e a experimentação de suas próprias hipóteses.



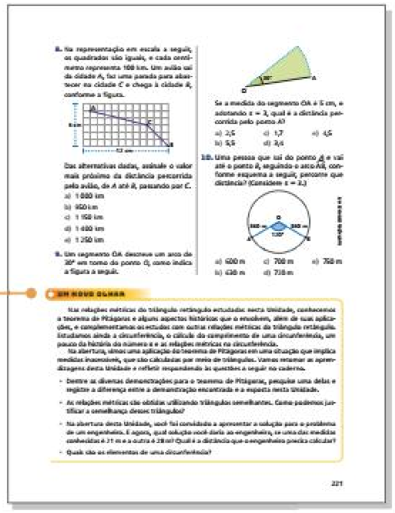
## PARA QUEM QUER MAIS

Nesta seção você encontra informações complementares relacionadas ao conteúdo estudado.



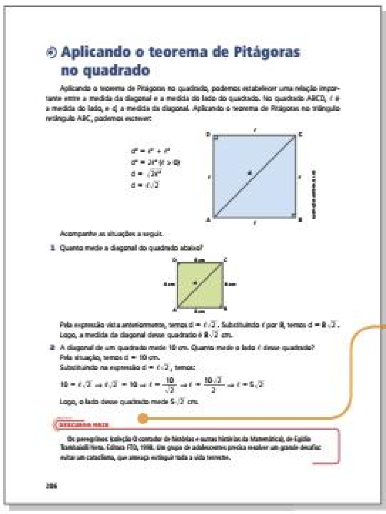
## SAIBA QUE...

Traz informações complementares de maneira rápida e acessível.



## UM NOVO OLHAR

É o momento de você refletir sobre os conhecimentos que adquiriu ao longo da Unidade e analisar sua produção nas propostas de trabalho, ampliando seu comprometimento com a aprendizagem.



## DESCUBRA MAIS

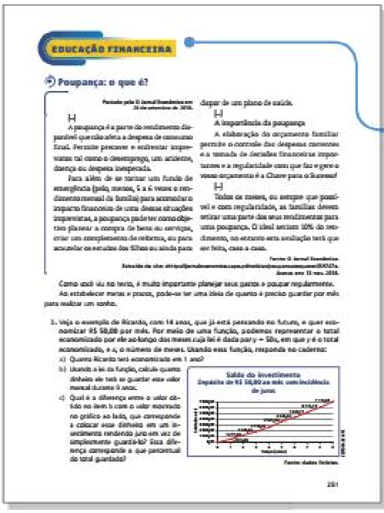
Apresenta indicações de livros e *sites* que propiciam o enriquecimento e aprofundam o conteúdo em questão.


## NÓS

Propicia a reflexão sobre valores, que será feita sempre em duplas, trios ou grupos.


## POR TODA PARTE

Esta seção apresenta diversas situações que possibilitam ainda mais a conexão da Matemática com diversas áreas do conhecimento.

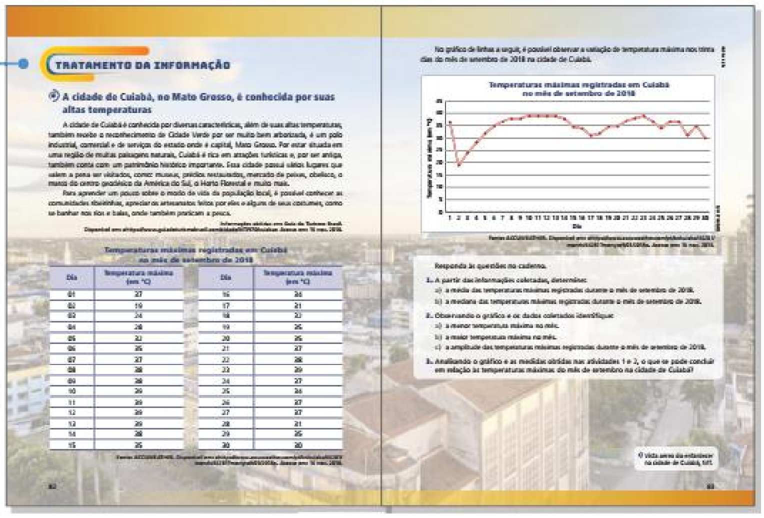



## EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Com o objetivo de desenvolver reflexões sobre atitudes como hábitos conscientes de consumo, a seção trata tópicos como controle de gastos, economia etc.

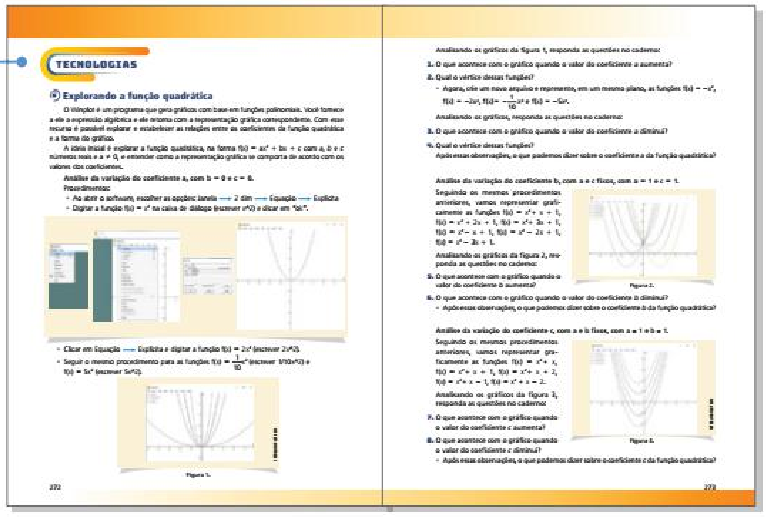
## TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Esta seção trabalha de forma organizada com propostas de tratamento e organização de dados, probabilidade e Estatística.



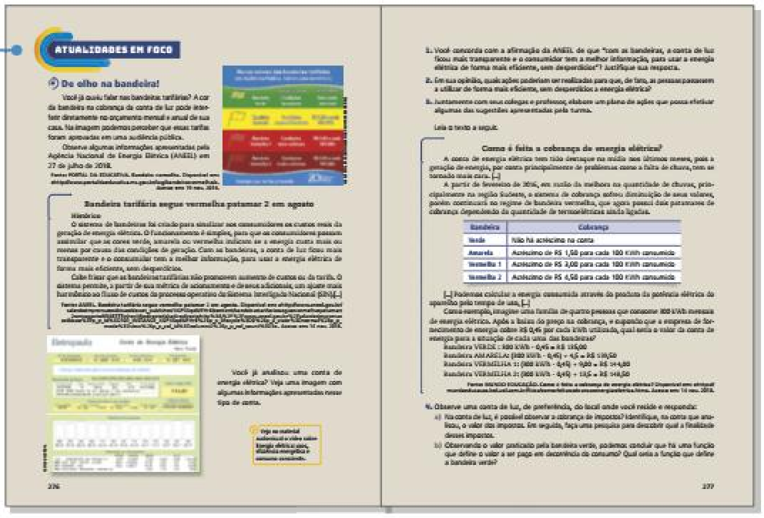
## TECNOLOGIAS

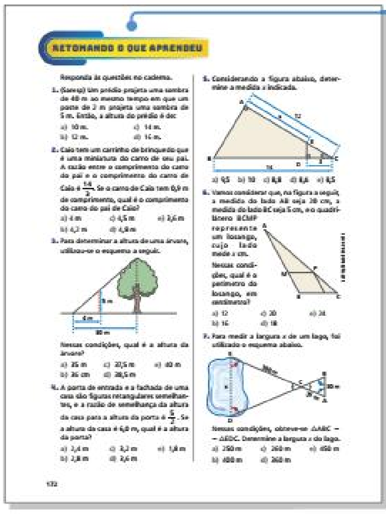
Nesta seção você verá como utilizar ferramentas tecnológicas na resolução de problemas ou questões matemáticas.



## ATUALIDADES EM FOCO

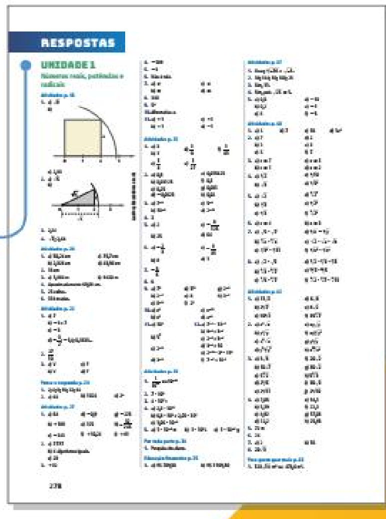
Nesta seção você encontrará o trabalho com temas atuais e de importância social. Será um momento de refletir sobre esses assuntos e de perceber como a Matemática ajuda a entender o mundo em que vivemos.





## RETOMANDO O QUE APRENDEU

Esta seção visa sistematizar os temas trabalhados por meio de atividades de todos os conteúdos estudados na Unidade.



## RESPOSTAS

No final do livro estão todas as respostas das atividades propostas.

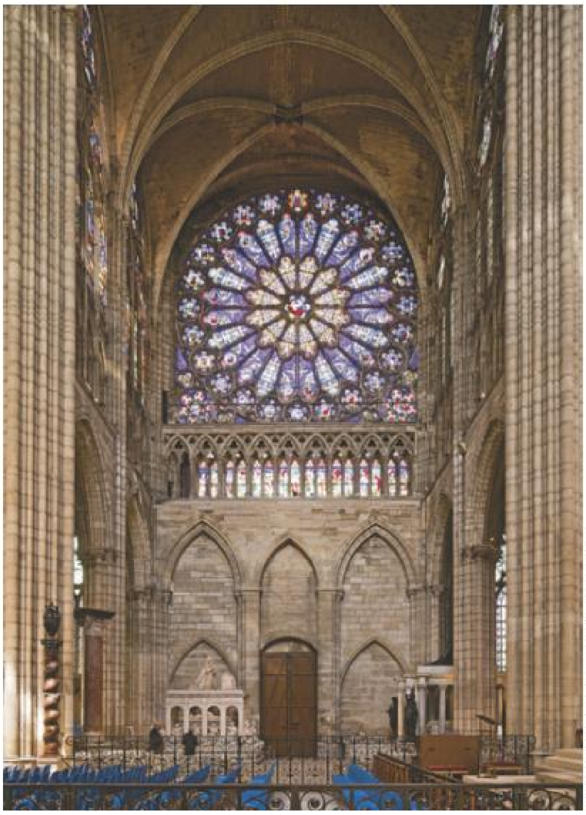
# SUMÁRIO

## UNIDADE 3
### EQUAÇÕES DO 2º GRAU ..... 86



## UNIDADE 4
### RELAÇÕES ENTRE ÂNGULOS ..... 118





FLORIAN MONHEIM/AGEFOTOSTOCK/EASYPIX

## UNIDADE 5
## PROPORÇÃO E SEMELHANÇA ............... 144



BILL HEINSOHN/ PHOTOGRAPHER'S CHOICE/GETTY IMAGES

## UNIDADE 6
## PORCENTAGEM, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA ........................................ 174



## UNIDADE 7
## RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA.... 196

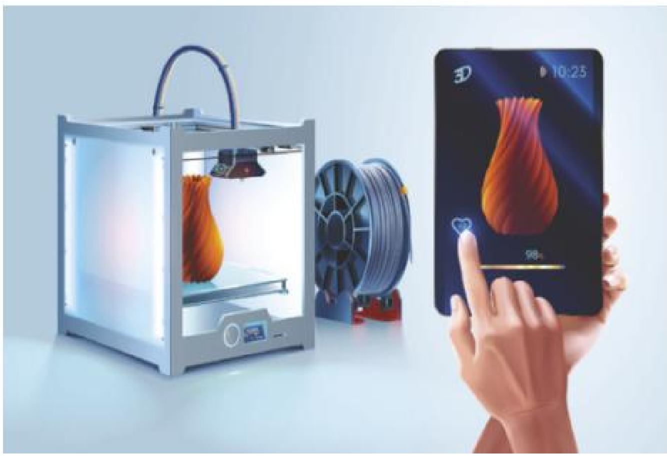
## UNIDADE 8




DADO PHOTOS/SHUTTERSTOCK.COM

## UNIDADE 9





ANDREY SUSLOV/SHUTTERSTOCK.COM

# 1 NÚMEROS REAIS, POTÊNCIAS E RADICAIS

Até agora, você estudou os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais. A cada novo conjunto numérico estudado, números novos foram agregados ao conjunto numérico já aprendido por você.

O conjunto dos números inteiros agregou ao conjunto dos números naturais os seus opostos. Já o conjunto dos números racionais agregou ao conjunto dos números inteiros todos os outros números na forma $\frac{a}{b}$, em que *a* e *b* são números inteiros e $b \neq 0$, e que podem ser escritos na forma decimal ou na forma de fração.

Ainda assim, com esses conjuntos não é possível escrever todos os números existentes. Temos, por exemplo, o número $\pi$ que, entre outros usos, é muito utilizado no estudo de circunferência. Veja ao lado um pouco da história do número $\pi$.

MUSEU BRITÂNICO, LONDRES

**O número $\pi$ é conhecido há pelo menos 4 000 anos.**

O Papiro de Ahmes (ou Papiro de Rhind), assim chamado em homenagem ao escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C., mostra que os matemáticos egípcios utilizavam o valor 3,16 para o número $\pi$.

DE AGOSTINI/GETTY IMAGES

**Na Grécia antiga, Arquimedes (287-212 a.C.) atribuía a $\pi$ um valor entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$.**

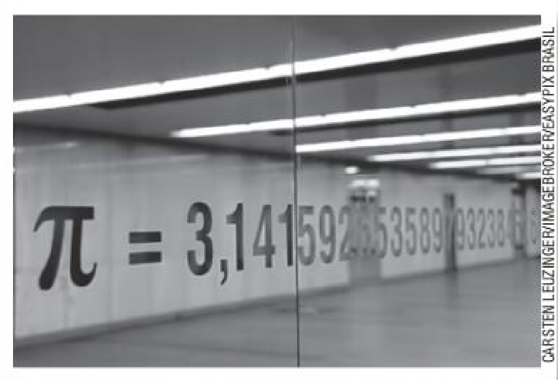
Agora, pense um pouco e responda no caderno:

- O número $\pi$, não sendo um número natural, nem inteiro nem racional, faz parte de outro conjunto de números. Que outro número você imagina que possa fazer parte desse conjunto? Ele deve ter alguma propriedade em comum com o número $\pi$?
- Como podemos obter uma aproximação para o número $\pi$?
- Em 2013, o número $\pi$ foi escrito com 8 quatrilhões de dígitos. Obviamente não podemos usar todos esses dígitos sempre que precisarmos fazer um cálculo matemático. Como fazer, então, para usar esse número em cálculos?

SPL/LATINSTOCK

**Em 1761, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático nascido em Mulhouse (Alsácia), na época, parte do território suíço, foi o primeiro a provar que o número π é irracional.**

**No início de 2013, Ed Karrels, um pesquisador afiliado à Universidade de Santa Clara (Estados Unidos), usando 24 computadores, conseguiu representar o número π com 8 quatrilhões de dígitos!**




CARSTEN LEUZINGER/IMAGEBROKER/EASYPIX BRASIL

MATHEMATICAL INSTITUTE/LEIDEN UNIVERSITY

**Por ocasião de sua morte, a esposa de Ludolph van Ceulen mandou gravar no túmulo dele o valor de π com as 35 casas decimais, como pode ser observado acima.**

SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

**O matemático chinês Tsu Ch'ung-chih (430-501 d.C.), por volta de 480 de nossa era, chegou a um valor entre 3,1415926 e 3,1415927, resultado surpreendente para a época.**

PRIVATE COLLECTION /PHILADELPHIA MUSEUM OF ART

**No fim do século XVI, o holandês Ludolph van Ceulen (1540-1610) obteve um valor para o número π com 35 casas decimais.**

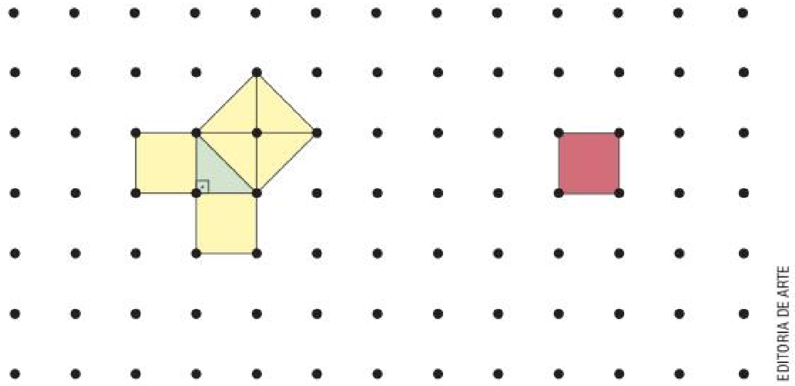
ILOLAB/SHUTTERSTOCK.COM

CAPÍTULO 1

# A GEOMETRIA E A DESCOBERTA DO NÚMERO IRRACIONAL

Vejamos a seguir a malha pontilhada em que representamos um triângulo retângulo isósceles (colorido de verde) e construímos quadrados sobre os lados desse triângulo (coloridos de amarelo).

Considerando o quadradinho vermelho como unidade de área, vamos determinar os números que expressam a área de cada quadrado amarelo construído.




- Área do quadrado construído sobre o lado maior do triângulo: 2 unidades de área.
- Área de cada quadrado construído sobre os lados menores do triângulo: 1 unidade de área.

Com esses números, podemos escrever a igualdade:

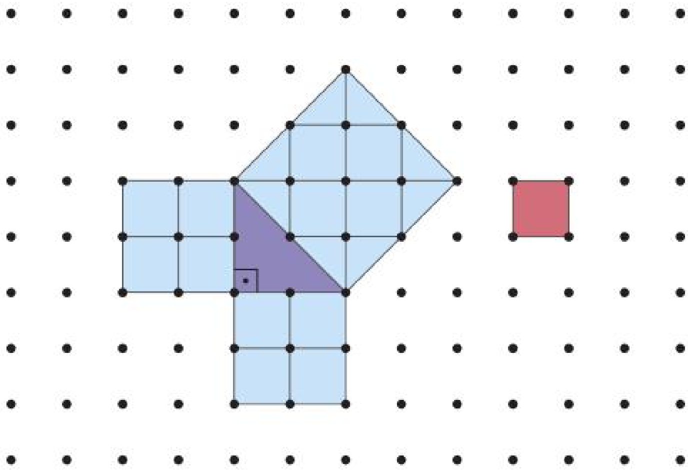
valor numérico da área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo

valor numérico da área do quadrado construído sobre um dos lados menores do triângulo

valor numérico da área do quadrado construído sobre o outro lado menor do triângulo

$$2 = 1 + 1$$

Considerando uma malha igual à anterior, vejamos um novo triângulo retângulo isósceles (colorido de roxo) e os quadrados construídos sobre os lados desse triângulo (os quadrados estão coloridos de azul).



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considerando ainda o quadradinho vermelho como unidade de área, vamos determinar os números que expressam a área de cada quadrado azul.

- Área do quadrado construído sobre o lado maior do triângulo: 8 unidades de área.
- Área de cada quadrado construído sobre os lados menores do triângulo: 4 unidades de área.

Com esses números, podemos escrever a igualdade:

**valor numérico da área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo**

**valor numérico da área do quadrado construído sobre um dos lados menores do triângulo**

**valor numérico da área do quadrado construído sobre o outro lado menor do triângulo**

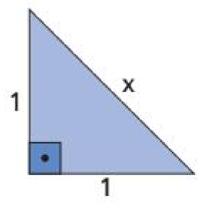
$8 = 4 + 4$

Esse fato vai se repetir sempre que considerarmos um triângulo retângulo isósceles, e também em um triângulo retângulo qualquer. Essa propriedade será demonstrada na Unidade 7.

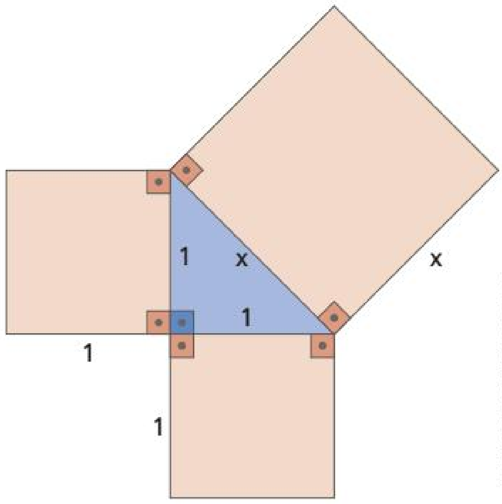
> Dado um triângulo retângulo qualquer, a área do quadrado construído sobre o seu maior lado será igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os outros dois lados.

Acompanhe, então, a seguinte situação.

**1** A figura a seguir representa um triângulo retângulo isósceles cujo maior lado mede *x*, e cada lado congruente mede 1 unidade de comprimento. Qual é o valor numérico da medida?



Aplicando a propriedade vista, temos a seguinte figura:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Veja no material audiovisual o vídeo sobre números irracionais.

Pela figura, obtemos:

$$\overbrace{x^2}^{\text{valor numérico da área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo}} = \overbrace{1^2 + 1^2}^{\text{soma dos valores numéricos das áreas dos quadrados construídos sobre os outros dois lados do triângulo}}$$

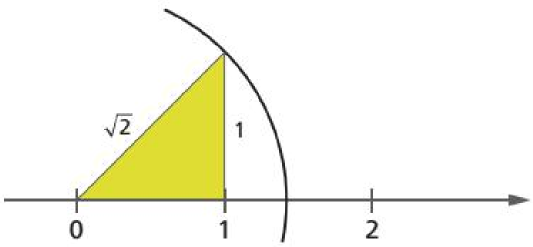
$x^2 = 1 + 1$

$x^2 = 2$ ou $x \cdot x = 2$

Como $x$ é a medida do maior lado, $x > 0$. Então, o valor numérico de $x$, que verifica essa equação, representa a raiz quadrada do número 2, ou seja, $\sqrt{2}$.

Vamos ver como é possível localizar o número irracional $\sqrt{2}$ em uma reta numérica, partindo da construção de um triângulo retângulo isósceles. Acompanhe:

Vamos construir um triângulo retângulo isósceles cujos lados menores medem 1 unidade, com um dos catetos sobre a reta numérica.

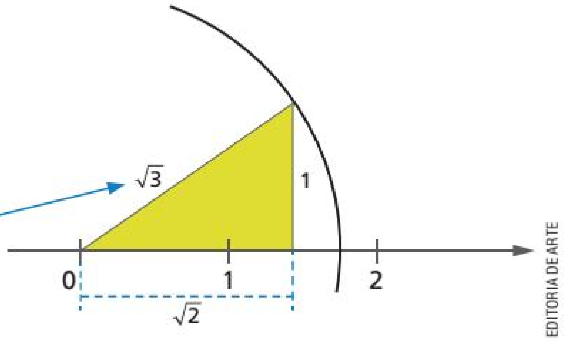



Vimos anteriormente que o maior lado desse triângulo mede $\sqrt{2}$ unidades. O ponto correspondente a esse valor na reta numérica pode ser encontrado colocando-se a ponta-seca do compasso em 0 e tomando como raio a medida da hipotenusa. O ponto em que a ponta de grafite cruza a reta numérica corresponde a $\sqrt{2}$.

Podemos fazer uma construção similar para posicionar o número irracional $\sqrt{3}$ sobre a reta numérica.

Vamos, a partir da figura anterior, construir um triângulo retângulo cujos lados menores medem agora 1 e $\sqrt{2}$ unidades. Pela propriedade apresentada anteriormente, é possível verificar que a medida do maior lado desse triângulo é $\sqrt{3}$.

$$x^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2$$
$$x^2 = 1 + 2$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3}$$




Observando essas construções geométricas, é possível perceber que os números irracionais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ estão entre os números 1 e 2.
Como os números 2 e 3 não são quadrados perfeitos, vamos calcular um valor aproximado para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

**1** O número 2 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, pois $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$. Fazemos tentativas:

$(1{,}1)^2 = 1{,}21 \longrightarrow 1{,}21 < 2$

$(1{,}2)^2 = 1{,}44 \longrightarrow 1{,}44 < 2$

$(1{,}3)^2 = 1{,}69 \longrightarrow 1{,}69 < 2$

$(1{,}4)^2 = 1{,}96 \longrightarrow 1{,}96 < 2$

$(1{,}5)^2 = 2{,}25 \longrightarrow 2{,}25 > 2$

Observamos, portanto, que $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5. Continuando o cálculo, temos:

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 \longrightarrow 1{,}9881 < 2$

$(1{,}42)^2 = 2{,}0164 \longrightarrow 2{,}0164 > 2$

Então, $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42. Prosseguindo com o cálculo, temos:

$(1{,}411)^2 = 1{,}990921 \longrightarrow 1{,}990921 < 2$

$(1{,}412)^2 = 1{,}993744 \longrightarrow 1{,}993744 < 2$

$(1{,}413)^2 = 1{,}996569 \longrightarrow 1{,}996569 < 2$

$(1{,}414)^2 = 1{,}999396 \longrightarrow 1{,}999396 < 2$

$(1{,}415)^2 = 2{,}002225 \longrightarrow 2{,}002225 > 2$

Desse modo, verificamos que $\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415. Então, podemos considerar que um valor aproximado para $\sqrt{2}$ é 1,414.

**2** O número 3 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, pois $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$.

Para descobrir o valor de $\sqrt{3}$, vamos fazer:

| | |
|---|---|
| $(1,1)^2 = 1,21$ | $(1,5)^2 = 2,25$ |
| $(1,2)^2 = 1,44$ | $(1,6)^2 = 2,56$ |
| $(1,3)^2 = 1,69$ | $(1,7)^2 = 2,89$ |
| $(1,4)^2 = 1,96$ | $(1,8)^2 = 3,24$ |

Vemos, então, que $\sqrt{3}$ está entre 1,7 e 1,8.

Vamos continuar o cálculo:

$(1,71)^2 = 2,9241$

$(1,72)^2 = 2,9584$

$(1,73)^2 = 2,9929$

$(1,74)^2 = 3,0276$

Vemos que $\sqrt{3}$ está entre 1,73 e 1,74.

Prosseguindo com o cálculo, temos:

$(1,731)^2 = 2,996361$

$(1,732)^2 = 2,999824$

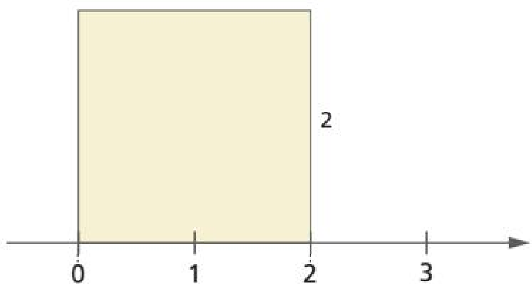
$(1,733)^2 = 3,003289$

Pelos últimos cálculos, vemos que $\sqrt{3}$ está entre 1,732 e 1,733. Então, podemos considerar que um valor aproximado para $\sqrt{3}$ é 1,732.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1. Observe a representação do quadrado da imagem.**



EDITORIA DE ARTE

**a)** Calcule a medida de sua diagonal.

**b)** Colocando a ponta-seca do compasso em 0 e tomando a medida da diagonal como raio, localize, na reta numérica, a posição de $\sqrt{8}$.

**c)** Determine o valor aproximado desse número irracional, com duas casas decimais.

**2.** Considere um triângulo retângulo cujos lados menores medem 2 cm e 1 cm.

**a)** Calcule a medida do seu maior lado.

**b)** Construa, em uma folha de papel quadriculado, o triângulo acima. O lado de 2 cm deve estar sobre a reta numérica, graduada a partir do zero. Colocando a ponta-seca do compasso em 0 e tomando a medida do maior lado como raio, localize, na reta numérica, a posição de $\sqrt{5}$.

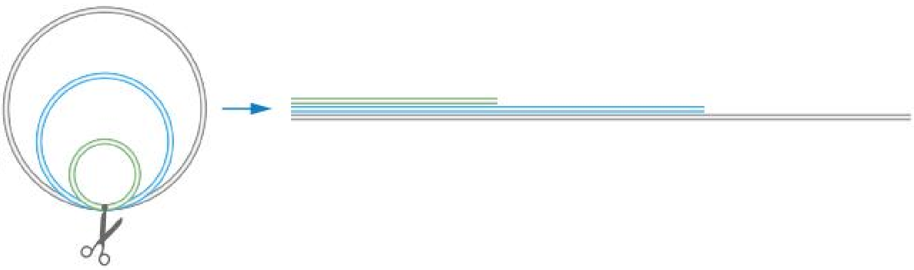
**3.** Sabemos que $\sqrt{5}$ está entre 2 e 3. Determine o valor aproximado desse número irracional, com duas casas decimais.

**4.** Qual deve ser o valor do número *x*, não negativo, para que se tenha $x^2 = 7$? Determine o valor aproximado desse número irracional, com duas casas decimais.

# Um número irracional importante: o número π (pi)

Imagine que as três circunferências da figura a seguir foram cortadas no ponto indicado pela tesoura, e a linha do traçado de cada uma delas foi esticada, dando origem a segmentos de reta.

EDITORIA DE ARTE



A medida de cada segmento obtido representa o **comprimento** de cada uma das respectivas circunferências.

Podemos estabelecer uma relação entre a medida do diâmetro e o comprimento da circunferência. Essa relação é obtida dividindo-se o comprimento da circunferência pela medida de seu diâmetro. Veja:

- Se medirmos uma moeda de 1 real, encontraremos, aproximadamente, 84,9 mm de comprimento da circunferência e 27 mm de diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{84{,}9 \text{ mm}}{27 \text{ mm}} \simeq 3{,}1444$$


EVILWATA/ SHUTTERSTOCK.COM

- Se medirmos uma lata de alumínio, encontraremos, aproximadamente, 220 mm de comprimento da circunferência e 70 mm de diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{220 \text{ mm}}{70 \text{ mm}} \simeq 3{,}1428$$


INFINI/SHUTTERSTOCK.COM

Nos dois exemplos, ao dividir o comprimento da circunferência pela medida do diâmetro (na mesma unidade), encontramos sempre um número maior que 3 (aproximadamente 3,14).

Pode-se verificar que esse fato se repete para qualquer circunferência, ou seja, dividindo-se a medida do comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro, obtém-se sempre o mesmo valor.

Esse valor constante representa um número muito importante em Matemática: o número pi, representado pela letra grega $\pi$.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\pi = 3{,}14159265...$$

Por ser um número irracional, utilizamos nas aplicações uma aproximação do valor de $\pi$, em geral 3,14.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Usando o valor 3,14 para $\pi$, calcule o **comprimento** de uma circunferência cujo raio mede:

**a)** 8 cm
**b)** 0,45 cm
**c)** 2,5 cm
**d)** 7 cm

**2.** Sabendo que o comprimento de uma circunferência é 56,52 cm, determine o diâmetro dessa circunferência. Considere $\pi = 3{,}14$.

**3.** Veja a medida do diâmetro de um pneu de automóvel:


Considerando $\pi = 3{,}14$, responda às questões.

**a)** Qual será, aproximadamente, o comprimento da circunferência desse pneu?

**b)** Se esse pneu der 5000 voltas completas, de quantos metros será a distância percorrida pelo automóvel?

**4.** Um abajur tem base circular com 22 cm de diâmetro. Necessita-se de uma fita que envolva todo o contorno dessa base. Qual é o comprimento de fita necessário para envolver a base desse objeto, aproximadamente?


**5.** Uma pista circular tem 200 m de diâmetro. Em uma competição, os corredores percorreram 15,7 km. Quantas voltas foram dadas nessa pista por esses corredores? (Considere $\pi = 3{,}14$.)

**6.** Ao redor de um jardim circular vão ser plantadas mudas de flores com espaçamento de 50 cm entre cada uma. Considerando que o jardim tem 50 m de diâmetro, quantas mudas serão plantadas? (Considere $\pi = 3{,}14$.)

CAPÍTULO 2

# OS NÚMEROS REAIS

Reunindo-se, em um mesmo conjunto, todos os números racionais e todos os números irracionais, formamos o **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

| | | |
|---|---|---|
| $2 \in \mathbb{R}$ | $-\dfrac{1}{6} \in \mathbb{R}$ | $-0{,}48 \in \mathbb{R}$ |
| $-5 \in \mathbb{R}$ | $\pi \in \mathbb{R}$ | $\sqrt{10} \in \mathbb{R}$ |
| $\dfrac{3}{4} \in \mathbb{R}$ | $1{,}25 \in \mathbb{R}$ | $1{,}666... \in \mathbb{R}$ |
| $2{,}030030003... \in \mathbb{R}$ | $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ | $-2{,}1333... \in \mathbb{R}$ |

Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, pois todos os elementos de cada um deles pertencem também a $\mathbb{R}$.

Além desses, outros subconjuntos de $\mathbb{R}$ são muito utilizados:

$\mathbb{R}^*$ ⟶ conjunto dos números reais não nulos (números reais diferentes de 0)

$\mathbb{R}_+$ ⟶ conjunto dos números reais não negativos (números reais maiores que ou iguais a 0).

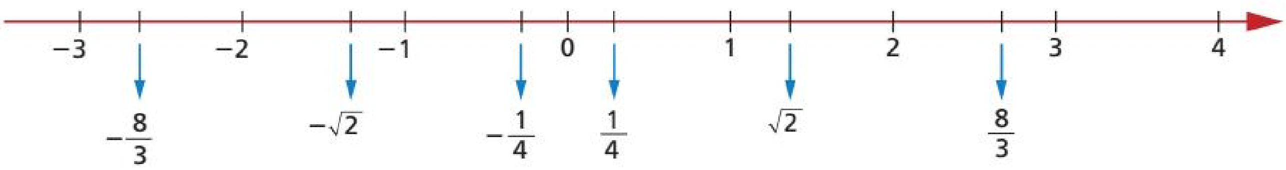
$\mathbb{R}_-$ ⟶ conjunto dos números reais não positivos (números reais menores que ou iguais a 0).

$\mathbb{R}^*_+$ ⟶ conjunto dos números reais positivos (números reais maiores que 0).

$\mathbb{R}^*_-$ ⟶ conjunto dos números reais negativos (números reais menores que 0).

Em uma reta numérica, podem ser representados todos os números racionais e todos os números irracionais, ou seja, podem ser representados todos os números reais; e cada ponto dessa reta pode ser associado a um número racional ou a um número irracional.

Essa reta é denominada **reta real**. Observe a representação de alguns números na reta:




EDITORIA DE ARTE

# As operações com números reais

Já vimos que há certas limitações em relação às operações nos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Assim:

- no conjunto $\mathbb{N}$, nem sempre é possível subtrair, obter divisões exatas ou extrair a raiz quadrada e encontrar um número natural;
- no conjunto $\mathbb{Z}$, nem sempre é possível obter divisões exatas ou extrair a raiz quadrada e encontrar um número inteiro;
- no conjunto $\mathbb{Q}$, nem sempre é possível extrair a raiz quadrada exata e encontrar um número racional.

Porém, no conjunto dos números reais, efetuamos qualquer adição, subtração, multiplicação e divisão com números reais (exceto a divisão por zero), bem como extraímos a raiz quadrada de qualquer número positivo e encontramos número reais.

Vale lembrar que há restrições: a raiz quadrada de um números negativo, por exemplo, não representa um número real, pois não existe número real que elevado ao quadrado tenha como resultado um número real negativo. Então, por exemplo, $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$. Vejamos algumas situações que envolvem operações com números reais.

**1** Calcular, com aproximação até a segunda casa decimal, o produto $5 \cdot \sqrt{3}$.
$\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ então $5 \cdot \sqrt{3} \simeq 5 \cdot 1{,}73 \Rightarrow 5 \cdot \sqrt{3} \simeq 8{,}65$
O valor procurado é 8,65.

**2** Calcular $\sqrt{5^4}$
$\sqrt{5^4} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{625} = 25$
Logo, o valor procurado é 25.

**3** Com valores aproximados até a segunda casa decimal, determinar $\sqrt{14} + \sqrt{2}$.
$\sqrt{14} \simeq 3{,}74$ e $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$
$\sqrt{14} + \sqrt{2} \simeq 3{,}74 + 1{,}41$; então, $\sqrt{14} + \sqrt{2} \simeq 5{,}15$
Então, o valor procurado é 5,15.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Observe os números a seguir.

$-3;\ -\dfrac{3}{2};\ -1{,}4;\ 0{,}3333....,\ 7,\ \sqrt{51}$

Quais deles pertencem ao conjunto:

a) $\mathbb{N}$?

b) $\mathbb{Z}$?

c) $\mathbb{Z}$, mas não pertencem a $\mathbb{N}$?

d) $\mathbb{Q}$, mas não pertencem a $\mathbb{Z}$?

**2.** Qual destes números reais é o maior: $\sqrt{7}$ ou $\dfrac{27}{10}$.

**3.** Analise cada uma das sentenças a seguir e diga se são verdadeiras ou falsas:

a) $100 \in \mathbb{R}_+$

b) $100 \notin \mathbb{R}_-$

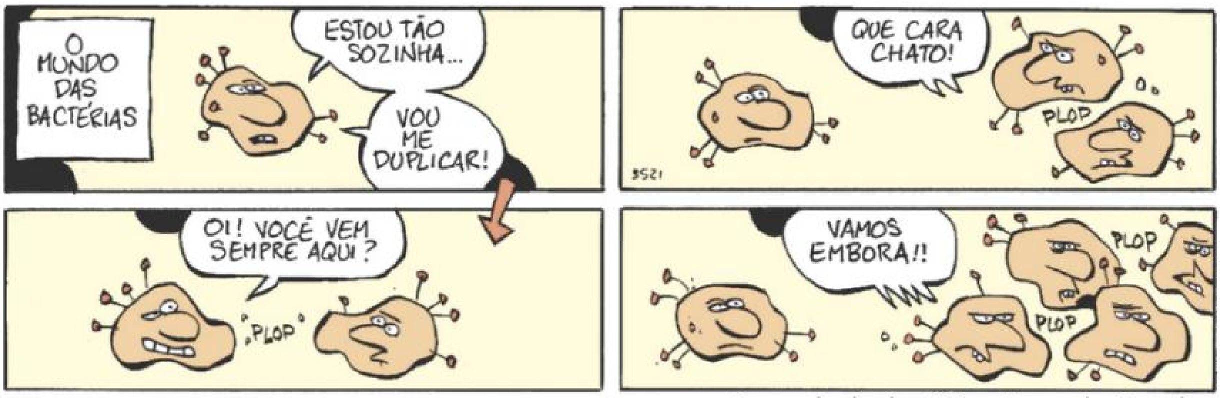
c) $\sqrt{-16} \in \mathbb{R}$

d) $-\pi \notin \mathbb{R}_-$

CAPÍTULO

# 3 POTÊNCIAS

Leia a tirinha e depois observe as informações sobre bactérias.




FERNANDO GONSALES

**O mundo das bactérias**. Fernando Gonsales.

As bactérias possuem dois tipos principais de reprodução: assexuada e sexuada.

A reprodução assexuada acontece com uma única bactéria e sem a troca de pedaços de DNA. É a forma mais rápida de as bactérias se reproduzirem. Na reprodução assexuada, a célula bacteriana divide-se em duas partes; cada uma dessas partes será uma nova bactéria igual à primeira. A cada intervalo de tempo, o número de bactérias dobra; com isso, em questão de horas, uma única bactéria dá origem a diversas outras.

Como todos os descendentes são iguais, se por acaso o ambiente mudar e tornar-se mortal para a primeira bactéria, todas as outras também morrerão, o que é uma desvantagem nesse tipo de reprodução.

SELMA CAPARROZ

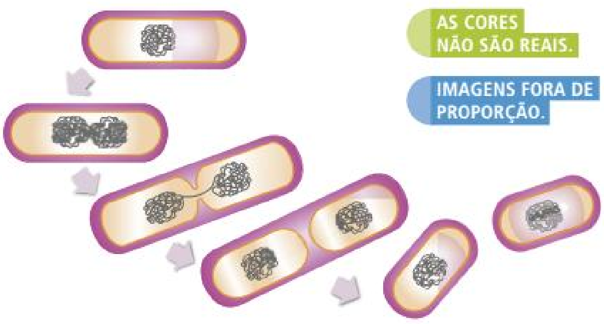
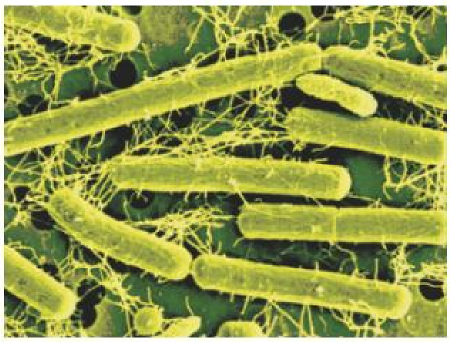



Ilustração elaborada com base em: RAVEN, P. H. et al. **Biologia vegetal**. 5. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2001. p. 176.



SCIMAT/SCIENCE SOURCE/GETTY IMAGES

Bactéria *Lactobacillus acidophillus* (aumento aproximado de 5461 vezes e colorido artificial).

Nem todas as bactérias são causadoras de doenças; muitas delas são encontradas em queijos, leites, iogurtes e outros alimentos fermentados. Quando administradas em quantidades adequadas, essas bactérias são benéficas à saúde. A esses organismos dá-se o nome de probióticos, termo derivado do grego, que significa "pró-vida".

## PENSE E RESPONDA

**1.** Com base nas informações apresentadas anteriormente, construa no caderno um quadro como este para os seis primeiros intervalos de tempo. Depois, complete-o relacionando a quantidade de intervalos de tempo transcorrido e a quantidade de bactérias existentes após cada um desses intervalos.

| Quantidade de intervalos de tempo transcorrido | Quantidade de bactérias existentes |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

**2.** Com base no quadro, responda no caderno:

**a)** Qual será a quantidade de bactérias existentes após os seis primeiros intervalos de tempo transcorrido?

**b)** E depois de 10 intervalos de tempo, qual será a quantidade de bactérias existentes?

**c)** Que expressão se pode usar para representar a quantidade de bactérias existentes após *n* intervalos de tempo transcorrido?

A expressão encontrada na seção *Pense e responda* é chamada potência e podemos defini-la do seguinte modo:

Dado um número real *a* e um número natural *n*, $n \neq 0$, a expressão $a^n$, denominada potência, representa um produto de *n* fatores iguais ao número real *a*.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Assim:

- $3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ vezes}} = 81$
- $(-1{,}4)^2 = \underbrace{(-1{,}4) \cdot (-1{,}4)}_{2 \text{ vezes}} = +1{,}96$
- $(-2)^5 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{5 \text{ vezes}} = -32$
- $10^1 = \underbrace{10}_{\text{uma vez}}$
- $\left(-\frac{1}{6}\right)^3 = \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)}_{3 \text{ vezes}} = -\frac{1}{216}$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{uma vez}}$

Na potência $a^n$:
- o número real *a* chama-se **base**;
- o número natural *n* chama-se **expoente**.

**Observação**:

Vamos considerar as potências $-2^2$ e $(-2)^2$.

Pela definição, temos: $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$ e $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

Logo, $-2^2 \neq (-2)^2$.

# Propriedades das potências com expoentes naturais

Existem propriedades das potências que nos auxiliarão, e muito, nos cálculos. Para estudá-las, vamos usar dois números reais *a* e *b*, não nulos, e dois números naturais *m* e *n*.

**1ª propriedade:**

Observe a multiplicação com potências de mesma base:

$$7^2 \cdot 7^3 = \underbrace{(7 \cdot 7)} \cdot \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7)} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$$

Então, $7^2 \cdot 7^3 = 7^5$. Como $5 = 2 + 3$, temos $7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$.

Como esse fato sempre ocorre quando temos uma multiplicação com potências de mesma base, isso nos permite escrever a seguinte propriedade:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Assim:

- $(0{,}6)^4 \cdot (0{,}6)^7 = (0{,}6)^{4+7} = (0{,}6)^{11}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5+1+9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$

**2ª propriedade:**

Observe a divisão com potências de mesma base:

$$7^5 : 7^3 = \frac{7^5}{7^3} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 = 7^2$$

Então, $7^5 : 7^3 = 7^2$. Como $2 = 5 - 3$, temos $7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$.

Como esse fato sempre ocorre quando temos uma divisão com potências de mesma base, isso nos permite escrever a seguinte propriedade:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0)$$

Assim:

- $(1{,}5)^{10} : (1{,}5)^4 = (1{,}5)^{10-4} = (1{,}5)^6$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^9 : \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{9-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$

**3ª propriedade:**

Observe a potenciação cuja base é uma potência:

$$(7^5)^2 = 7^5 \cdot 7^5 = 7^{5+5} = 7^{10}$$

Então, $(7^5)^2 = 7^{10}$. Como $10 = 5 \cdot 2$, temos $(7^5)^2 = 7^{5 \cdot 2} = 7^{10}$

Como esse fato sempre ocorre quando temos uma potência de outra potência, isso nos permite escrever a seguinte propriedade:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Assim:

- $(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$
- $[(0,5)^4]^3 = (0,5)^{4 \cdot 3} = (0,5)^{12}$
- $\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^5\right\}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \cdot 5 \cdot 2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{20}$

**4ª propriedade:**

Observe as potenciações cuja base é um produto ou um quociente:

- $(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = \underbrace{3 \cdot 3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5} = 3^2 \cdot 5^2$
- $(2 : 7)^2 = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right) = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 7} = \frac{2^2}{7^2} = 2^2 : 7^2$

Como esses fatos sempre ocorrem quando temos a potência de uma multiplicação ou de uma divisão, podemos escrever a seguinte propriedade:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{e} \quad (a : b)^n = a^n : b^n \ (b \neq 0)$$

Assim:

- $(2^2 \cdot 3 \cdot 5^3)^2 = (2^2)^2 \cdot 3^2 \cdot (5^3)^2$ ou $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6$
- $(5 : 11)^4 = 5^4 : 11^4$

**SAIBA QUE**

Essa 4ª propriedade não é válida para a adição ou subtração, pois $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$

# Expoente zero

Vamos calcular o quociente de $2^5 : 2^5$.

- Aplicando a definição de potência, temos $2^5 : 2^5 = 3^2 : 3^2 = 1$.
- Aplicando a propriedade da divisão de potências de mesma base, temos $2^5 : 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$.

Comparando os dois resultados, podemos escrever que $\mathbf{2^0 = 1}$, o que ocorre com qualquer número real não nulo.

De modo geral:

Para todo número real *a*, com $a \neq 0$, temos $a^0 = 1$.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Aplicando a definição de potência, calcule o valor de:

**a)** $8^2$
**b)** $(-13)^2$
**c)** $(-7)^3$
**d)** $(-0,9)^1$
**e)** $5^3$
**f)** $(-3,2)^2$
**g)** $-15^2$
**h)** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5$
**i)** $(-3)^4$

**2.** Considere o número $N = (6^5 + 1)$ e responda às questões:

**a)** Qual é o valor de *N*?
**b)** Quantos algarismos formam o número *N*?
**c)** Qual é a soma dos valores absolutos dos algarismos que formam o número *N*?

**3.** Dada a expressão:

$(-2)^3 + (-3)^2 - (-1)^2 - (-2)^5$

Calcule o valor numérico dessa expressão.

**4.** Determine o número real que representa o valor da seguinte expressão:

$(-2)^4 - (0,5)^2 : (+0,1)^3 - (-5)^3$

**5.** Sabendo que $x = (-2)^4 : 4^2 - 4^2 : (-2)^3$ e $y = [(-1)^3 - (-1)^5 \cdot (-1)^4] + (-1)^7$, qual é o valor da expressão $x \cdot y$?

**6.** Verifique se o número real $(-1,5)$ é raiz da equação $2x^2 - 5,5x + 3 = 0$.

**7.** Usando o sinal $=$ ou $\neq$, você deve comparar as potências:

**a)** $(-10)^2$ e $-10^2$
**b)** $(-3)^3$ e $-3^3$
**c)** $(-2)^6$ e $-(+2)^6$
**d)** $-(-7)^3$ e $7^3$

**8.** Um campeonato de tênis de mesa é disputado por 20 duplas, que jogam entre si em turno (jogo de ida) e returno (jogo de volta). O número total de jogos nesse tipo de campeonato é dado pela expressão algébrica $x^2 - x$, em que *x* representa o número de duplas. Quantos jogos tem esse campeonato?

ILUSTRA CARTOON

**9.** Sabendo que $x = (5^2)^3 \cdot (5^3 : 5^2)^4$ e $y = (5^9)^2 : (5^4 \cdot 5^2)^2$, qual é a potência de 5 que representa o valor de $x : y$?

**10.** (Enem/MEC) Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões ($10^7$) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas **Veja** (ed. 2055), **Cláudia** (ed. 555), **National Geographic** (ed. 93) e **Nova Escola** (ed. 208) (adaptado).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consumam 1 000 litros de óleo em frituras por semana.

Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

**a)** $10^{-2}$
**b)** $10^3$
**c)** $10^4$
**d)** $10^6$
**e)** $10^9$

**11.** Calcule o valor de:

**a)** $10^0$
**b)** $-10^0$
**c)** $(-10)^0$
**d)** $-(-10)^0$

# Potência de um número real com expoente inteiro

Vamos calcular o quociente de $2^3 : 2^4$.

- Considerando o quociente na forma de uma fração:

$$2^3 : 2^4 = \frac{2^3}{2^4} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{2}$$

- Aplicando a propriedade do quociente de potências que têm a mesma base:

$$2^3 : 2^4 = 2^{3-4} = 2^{-1}$$

Comparando os dois resultados, podemos dizer que:

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Procedendo da mesma forma, podemos mostrar que:

- $3^{-1} = \frac{1}{3}$
- $4^{-1} = \frac{1}{4}$
- $5^{-1} = \frac{1}{5}$
- $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 7$

De modo geral:

Para todo número real *a*, com $a \neq 0$, temos $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Logo:

- $10^{-1} = \frac{1}{10}$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$
- $(-3)^{-1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

Vamos agora calcular o quociente de $2^5 : 2^8$.

- Considerando o quociente na forma de uma fração:

$$2^5 : 2^8 = \frac{2^5}{2^8} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

- Aplicando a propriedade do quociente de potências de mesma base:

$$2^5 : 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3}$$

Comparando os dois resultados, podemos dizer que:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Se considerarmos o expoente zero e alguns números inteiros negativos como expoentes, podemos montar este quadro:

| Base | Expoente | Potência |
|---|---|---|
| 2 | 4 | $2^4 = 16$ |
| 2 | 3 | $2^3 = 8$ |
| 2 | 2 | $2^2 = 4$ |
| 2 | 1 | $2^1 = 2$ |
| 2 | 0 | $2^0 = 1$ |
| 2 | $-1$ | $2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ |
| 2 | $-2$ | $2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ |
| 2 | $-3$ | $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ |

8 é igual a $\frac{1}{2}$ de 16

4 é igual a $\frac{1}{2}$ de 8

2 é igual a $\frac{1}{2}$ de 4

1 é igual a $\frac{1}{2}$ de 2

$\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{1}{2}$ de 1

$\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8}$ é igual a $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$

De modo geral:

Para todo número real *a*, com $a \neq 0$, temos $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$, sendo *n* um número natural.

Assim:

- $5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$
- $(-2)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
- $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-3} = \left(-\frac{7}{4}\right)^3 = -\frac{343}{64}$

Veja a seguir algumas situações em que esses conhecimentos são aplicados.

**1** Determinar o valor da expressão $3^{-1} + 2^{-2} - (-4)^{-1}$.

$$3^{-1} + 2^{-2} - (-4)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

**2** Para $a \neq 0$ e $x \neq 0$, escrever a expressão $(2a^3x^{-1})^{-1}$ com expoentes positivos.

$$(2a^3x^{-1})^{-1} = \left(2a^3 \cdot \frac{1}{x}\right)^{-1} = \left(\frac{2a^3}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{2a^3}$$

# Propriedades das potências com expoentes inteiros

Vamos considerar as propriedades a seguir.

**1ª propriedade:**

Para multiplicação de potências de mesma base podemos escrever a seguinte propriedade:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Então:

- $5^2 \cdot 5^{-6} = 5^{2+(-6)} = 5^{2-6} = 5^{-4}$
- $10^{-3} \cdot 10^{-2} = 10^{-3+(-2)} = 10^{-3-2} = 10^{-5}$
- $2^n \cdot 2^3 = 2^{n+3}$ sendo *n* um número inteiro.

**2ª propriedade:**

Para divisão de potências de mesma base, podemos escrever a seguinte propriedade:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ ou } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Então:

- $6^4 : 6^7 = 6^{4-7} = 6^{-3}$
- $10^3 : 10^{-2} = 10^{3-(-2)} = 10^{3+2} = 10^5$
- $\dfrac{2^{-5}}{2^{-7}} = 2^{-5-(-7)} = 2^{-5+7} = 2^2$
- $\dfrac{3^{n-2}}{3^{n+1}} = 3^{n-2-(n+1)} = 3^{n-2-n-1} = 3^{-3}$, sendo *n* um número inteiro.

**3ª propriedade:**

Para potência de uma potência, podemos escrever a seguinte propriedade:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Então:

- $(10^3)^{-2} = 10^{3 \cdot (-2)} = 10^{-6}$
- $(5^{-1})^{-3} = 5^{(-1) \cdot (-3)} = 5^3$
- $(10^x)^5 = 10^{x \cdot 5} = 10^{5x}$, sendo *x* um número inteiro

**4ª propriedade:**

Para transformar potência de um produto em um produto de potências, e potência de um quociente em um quociente de potências, podemos escrever a seguinte propriedade:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \text{ ou } (a : b)^n = a^n : b^n$$

Então:

- $(2 \cdot 5)^{-4} = 2^{-4} \cdot 5^{-4}$
- $(7 : 2)^{-3} = 7^{-3} : 2^{-3}$
- $(10 \cdot x)^{-2} = 10^{-2} \cdot x^{-2}$, com $x \neq 0$
- $(x : 5)^{-1} = x^{-1} : 5^{-1}$, com $x \neq 0$.

**SAIBA QUE**

As mesmas propriedades estudadas para as potências com expoentes naturais valem para as potências com expoentes inteiros e base real não nula.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Observe a seguinte sequência:

$3^4 = 81$, $3^3 = 27$, $3^2 = 9$

Agora, calcule o valor de:

a) $3^1$ c) $3^{-1}$ e) $3^{-3}$

b) $3^0$ d) $3^{-2}$ f) $3^{-4}$

**2.** Dê o valor, na forma decimal, de:

a) $2^{-1}$ e) $-(-4)^{-3}$

b) $2^{-5}$ f) $-(-10)^{-1}$

c) $(-2)^{-2}$ g) $10^{-3}$

d) $-2^{-4}$ h) $5^{-2}$

**3.** Você sabe que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e que $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, pela propriedade simétrica da igualdade. Nessas condições, escreva na forma de potência com expoente inteiro negativo cada uma das seguintes expressões:

a) $\frac{1}{7^5}$ c) $\frac{1}{5^6}$

b) $\frac{1}{10^9}$ d) $\frac{1}{2^{10}}$

**4.** Um número real *x* é tal que:

$x = (2^0 + 2^{-1}) : (2^0 - 2^{-1})$.

Qual é o valor do número *x*?

**5.** Calcule o valor de cada uma das seguintes potências:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ c) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ d) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}$

**6.** Determine o valor numérico de cada uma das seguintes expressões:

a) $(-1)^{-3} - (-3)^{-1}$

b) $(2^{-4} + 4^{-2})^{-1}$

c) $3^{-4} - 3^{-2}$

d) $(8^{-2} \cdot 4^3)^{-1}$

**7.** Um número real R é tal que

$$R = \frac{-2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{-2^4 + (-3)^2 + 4^0}.$$

Qual é o valor de R?

**8.** Qual é o número real expresso por

$2^0 + (-2)^6 \cdot 4^{-3} - (-2)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$?

**9.** Escreva cada uma das seguintes expressões na forma de uma só potência:

a) $7^{11} \cdot 7^{-8}$ e) $8^3 \cdot 8^{-7} \cdot 8^5$

b) $2^4 : 2^5$ f) $(2^{-1})^{-3}$

c) $(8^{-1})^5$ g) $2^{-4} : 2^{-1}$

d) $5^9 : 5^{-3}$ h) $3^{-1} \cdot 3^6 \cdot 3^4 \cdot 3^{-10}$

**10.** Nas expressões seguintes, a base de cada potência é um número real não nulo. Transforme cada expressão em uma só potência:

a) $x^3 \cdot x^{-7} \cdot x^6$

b) $x^{-1} : x^{-3}$

c) $(x^6)^{-2}$

d) $a^9 \cdot a^{-4} \cdot a^7 \cdot a^{-15}$

**11.** Escreva cada fração na forma de uma só potência:

a) $\frac{10^{-2}}{10^{-4}}$ c) $\frac{2^{-3}}{2^2}$

b) $\frac{5^6}{5^{-1}}$ d) $\frac{3^7}{3^{10}}$

**12.** Transforme cada expressão em um produto (ou em um quociente) de potências:

a) $(7 \cdot 13)^{-2}$

b) $(9 : 5)^{-3}$

c) $(2^{-1} \cdot 5^{-2})^2$

d) $(3^4 : 10^{-1})^{-1}$

e) $(2^5 \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-1})^{-2}$

f) $(7^{-1} : 10^2)^2$

# A notação científica

Muitas vezes é conveniente escrever um número em forma de potência.

Por exemplo, o número 140 000 000, que representa a medida aproximada, em metros, do diâmetro do planeta Júpiter, é um número muito grande, enquanto o número 0,0000000106, que representa, em centímetros, a medida aproximada do diâmetro de um átomo de hidrogênio, é um número muito pequeno.

Para escrever esses e outros números, podemos usar potências de 10, conforme veremos a seguir:

**1** Escrever o número: 0,0000001 na forma de potência de 10.

$$0{,}\underbrace{0000001}_{\text{7 casas decimais}} = \frac{1}{1\underbrace{0000000}_{\text{7 zeros}}} = \frac{1}{10^7} = 10^{-7}$$

**2** Vamos escrever o número 5 000 000 000 na forma de potência de 10.

$$5\underbrace{000\,000\,000}_{\text{9 zeros}} = 5 \cdot 1\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10^9$$

**NÓS**

**Exploração espacial**

Além de motivada pelo interesse que o ser humano sempre teve pelo espaço, a exploração espacial é impulsionada pelo desenvolvimento científico que gera. Não só novas tecnologias são criadas, como o próprio espaço fornece um ambiente único, com características físicas impossíveis de serem simuladas na Terra, tornando-o um laboratório sem igual para estudos científicos.

- As missões espaciais, apesar de importantes, são caras e não trazem retorno financeiro para os governos que as financiam. Você acredita que esse grande investimento financeiro justifica o conhecimento científico adquirido com as missões espaciais? Debata com seus colegas de sala.

# Escrevendo na notação científica

A distância média aproximada da Terra ao Sol é 150 000 000 km.

Por ser um número muito grande, podemos escrever o número 150 000 000 usando a **notação científica**.

Na **notação científica**, um dos fatores deve ser maior ou igual a 1 e menor que 10, enquanto o outro fator deve ser uma potência de 10.

Voltando ao número 150 000 000, temos:

$$150\,000\,000 = 15 \cdot 10^7$$

Para a notação científica, vamos dividir o fator 15 por 10 e, para não alterar o número, vamos multiplicar o fator $10^7$ por 10:

$$15 \cdot 10^7 = [15 : (10)] \cdot [10^7 \cdot (10)] = 1{,}5 \cdot 10^8$$

Então, a distância média aproximada da Terra ao Sol é $1{,}5 \cdot 10^8$ km, na notação científica.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** A expressão um décimo de milésimo do metro pode ser escrita usando potências de 10 da seguinte forma:

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} \text{ ou } 10^{-4}$$

Em texto publicado no jornal **Folha de S.Paulo**, em 16/9/2007, o físico brasileiro Marcelo Gleiser escreveu que "átomos têm diâmetros de aproximadamente um décimo de bilionésimo de metro". Como você pode escrever esse número usando potência de 10?

**2.** Em março de 2011, a frota de veículos da cidade de São Paulo ultrapassou a marca de 7 000 000 de veículos. Escreva esse número usando um produto de dois fatores em que um deles é um número inteiro maior que 1 e menor que 10, e o outro é uma potência de 10.

**3.** Em 2008, o Brasil foi um dos três maiores produtores de frutas do mundo, ficando somente atrás da China e da Índia, representando cerca de 5% da produção mundial. Sua produção superou 40 milhões de toneladas.

Escreva o número que representa a produção do Brasil, em toneladas, na forma de potência de 10.

**4.** Escreva, em notação científica, os números destacados em cada uma das afirmações:

**a)** Em um grama de água há **23 000 000 000 000 000 000 000** de moléculas.

**b)** O diâmetro do planeta Marte mede cerca de **6 800** km, e a distância mínima de Marte ao Sol é **205 000 000** km.

**c)** O diâmetro de um átomo de hidrogênio mede **0,0000000106** cm.

**5.** Algumas potências de 10, pela sua grande utilização, estão associadas a prefixos originados do latim e do grego.

| Prefixo | Significado | Potência de 10 |
|---|---|---|
| giga | gigante (em grego) | $10^9$ (1 000 000 000) |
| mega | grande (em grego) | $10^6$ (1 000 000) |
| quilo | mil (em grego) | $10^3$ (1 000) |
| hecto | cem (em grego) | $10^2$ (100) |
| deca | dez (em grego) | $10^1$ (10) |
| deci | décimo (em latim) | $10^{-1}$ (0,1) |
| centi | centésimo (em latim) | $10^{-2}$ (0,01) |
| mili | mil (em latim) | $10^{-3}$ (0,001) |
| micro | pequeno (em grego) | $10^{-6}$ (0,000001) |
| nano | anão (em grego) | $10^{-9}$ (0,000000001) |

Assim, o prefixo **quilo**, usado em expressões como quilômetro, equivale a 1 000 metros, e quilowatt, equivale a 1 000 watts. Escreva, usando a notação científica, os valores destacados em cada uma das afirmações:

**a)** O prefixo centi é usado em expressões como centímetro, que equivale a **um centésimo do metro**.

**b)** O prefixo mega, usado em expressões como megalitro (unidade usada para medir a capacidade de lagos e represas), equivale a **um milhão de litros**.

**c)** O prefixo micro é usado em expressões como micrograma, que equivale à **milionésima parte do grama**.

**POR TODA PARTE**

## Dados demográficos do Estado do Amazonas

O Amazonas é o maior estado brasileiro em área e detém uma imensa biodiversidade. De acordo com dados do IBGE (Censo 2010), o Amazonas ocupa uma área de aproximadamente 1 559 162 km², com uma população de 3 483 985 habitantes.

Informações obtidas em: GOVERNO DO ESTADO DO AMAZONAS. **Dados**. Disponível em: <www.amazonas.am.gov.br/o-amazonas/dados/>. Acesso em: 13 fev. 2015.

JOSE ROBERTO COUTO/TYBA

Vista da cidade de Parintins, com o Rio Amazonas ao fundo, AM. Junho de 2014.

Usando uma calculadora, vamos determinar a **densidade demográfica** do Amazonas em 2010:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área ocupada em km}^2}$$

$$\text{densidade demográfica} = \frac{3\,483\,985 \text{ hab.}}{1\,559\,162 \text{ km}^2} = 2{,}23 \text{ hab./km}^2$$

Fazendo aproximações e usando a **notação científica** e as **propriedades das potências de mesma base**, vamos agora calcular a **densidade demográfica** aproximada do estado do Amazonas em 2010:

- População = 3 483 985 ou, aproximadamente, 3 500 000 habitantes
  Na notação científica: $3\,500\,000 = 3{,}5 \cdot 10^6$;
- Superfície = 1 559 162 km² ou, aproximadamente, 1 600 000 km²
  Na notação científica: $1\,600\,000 = 1{,}6 \cdot 10^6$.

$$\text{densidade demográfica} = \frac{3{,}5 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^6} = \frac{3{,}5}{1{,}6} \cdot \frac{10^6}{10^6} \simeq 2{,}20 \cdot 10^0 = 2{,}20 \cdot 1 = 2{,}20$$

Note que, utilizando aproximações, obtivemos um resultado (2,20) bem próximo do resultado real (2,23).

**1.** Agora, faça uma pesquisa sobre a população e a área do seu estado e do seu município. Usando os dois processos aqui apresentados, calcule, com uma calculadora, e registre no caderno a densidade demográfica do estado e do município onde você mora. Compare os resultados e avalie a diferença entre os valores.

# Os juros do cartão de crédito

## 80% dos brasileiros preferem o cartão na hora de parcelar, mas só um terço conhece os juros cobrados

SPC Brasil
Publicado em 2 junho 2014.

Um estudo feito pelo portal '***Meu Bolso Feliz***' (http://meubolso feliz.com.br), uma iniciativa de Educação Financeira do **Serviço de Proteção ao crédito (SPC Brasil)**, mostra que o cartão de crédito é a modalidade de pagamento mais utilizada pelos consumidores na hora de parcelar uma compra: 83% dos entrevistados afirmam ter incorporado esse costume em seu dia a dia, sendo que quase um quarto (23%) dos consumidores ouvidos costuma fazer compras parceladas com o chamado 'dinheiro de plástico' ao menos uma vez por mês. [...]

[...] mais da metade (57%) dos consumidores entrevistados já usou ou tem o hábito de usar o crédito rotativo – situação em que o consumidor opta por pagar apenas o valor mínimo da fatura do cartão. Um agravante é que a maioria dos consumidores (77%) reconhece não ter conhecimento do valor dos juros cobrados nesse tipo de operação.

"O cartão de crédito trouxe conveniência e segurança porque viabiliza o poder imediato de compra, mesmo que o consumidor não disponha de dinheiro no momento do uso. Mas para usufruir das vantagens, é preciso controle para que a pessoa não gaste mais do que efetivamente possa pagar. Aqueles consumidores que não quitam o valor integral da fatura correm o risco de cair no efeito 'bola de neve', já que hoje a taxa média cobrada nessas operações gira em torno de 200% ao ano. É uma das maiores do mundo"[...].

**Usar o cartão pode ser vantajoso**

[...] "O grande diferencial do cartão de crédito é que ele proporciona poder de compra. Isso significa que o consumidor pode adquirir um bem mesmo sem ter o dinheiro. Porém, essa é uma vantagem que se transforma facilmente em desvantagem, quando não há controle. O cartão de crédito, ao contrário do que muitos pensam, não é um vilão para o consumidor. Tudo depende de como ele é utilizado", garante.

**Ameaças do cartão de crédito**

Já em relação aos perigos oferecidos pelo cartão de crédito, quatro em cada dez entrevistados (39%) atribuem à facilidade de compra como a principal causa das compras supérfluas, seguida pela dificuldade em manter o controle do valor das compras realizadas (36%) e não resistir às compras por impulso (16%).

Fonte: CNDL. **80% dos brasileiros preferem o cartão na hora de parcelar**. Disponível em: <http://www.cndl.org.br/noticia/80-dos-brasileiros-preferem-o-cartao-na-hora-de-parcelar-mas-so-um-terco-conhece-os-juros-cobrados/>. Acesso em: 6 nov. 2018.

Responda à questão no caderno.

**1.** Ana Maria gastou mil reais em seu cartão de crédito e não pode pagar o valor total no primeiro mês. Ana Maria tem um cartão de crédito cuja taxa de juro é 7,5%. No primeiro mês, ela recebeu sua fatura com valor de R$ 1000,00. Como não havia planejado corretamente esse gasto, pagou apenas R$ 200,00. Preocupada com a dívida, parou de usar esse cartão para novas compras. No segundo mês, recebeu a nova fatura com o que restou da dívida e os juros e, novamente, pagou apenas R$ 200,00. Analise a situação de Ana Maria e responda:

**a)** Quanto ela deve pagar no terceiro mês, sem fazer novas compras, para quitar totalmente a dívida?

**b)** Quanto ela vai pagar, no total, para quitar os R$ 1000,00 iniciais no terceiro mês?

CAPÍTULO 4

# RADICAIS

## Raiz enésima de um número real

Consideremos um número real *a* e um número natural *n*, com $n > 1$. A raiz enésima de um número real *a* é indicada pela expressão:

**índice**

$$\sqrt[n]{a}$$

**radicando**

Para examinar esse conceito de raiz enésima, vamos separar o estudo em dois casos: quando o índice for par e quando o índice for ímpar.

Acompanhe-os a seguir.

**1º caso:**

O índice *n* é par.

Podemos dizer que:

- quando o número real *a* é positivo ($a > 0$) e *n* é um número natural par diferente de zero, a expressão $\sqrt[n]{a}$ é igual ao número real positivo *b*, tal que $b^n = a$.
- quando o número real *a* é negativo ($a < 0$) e *n* é um número natural par diferente de zero, a expressão $\sqrt[n]{a}$ não é definida no conjunto dos números reais.

Observe:

- $\sqrt{49} = 7$, pois $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$.
- $\sqrt{27{,}04} = 5{,}2$, pois $5{,}2^2 = 5{,}2 \cdot 5{,}2 = 27{,}04$.
- $\sqrt[6]{729} = 3$, pois $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$.
- $\sqrt[8]{256} = 2$, pois $2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$.

Já vimos que não se define a raiz quadrada de um número real negativo, pois ao elevarmos um número real ao quadrado não obteremos um número real negativo. Esse fato se estende quando temos a raiz quarta ou a raiz sexta ou a raiz oitava, e assim por diante, de um número real negativo.

MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Observe:

$2^2$ é igual a 4, e $(-2)^2$ também é igual a 4. Não existe um número real que elevado ao quadrado seja igual a $-4$.

Dizemos, então, que $\sqrt{-4}$ não se define em $\mathbb{R}$.

Veja outros exemplos:

- $\sqrt[8]{-256}$ não se define em $\mathbb{R}$.
- $\sqrt[6]{-1}$ não se define em $\mathbb{R}$.
- $\sqrt[4]{-81}$ não se define em $\mathbb{R}$.

É importante notar a diferença entre as expressões $-\sqrt{9}$ e $\sqrt{-9}$.

- $-\sqrt{9}$ é o oposto de $\sqrt{9}$; logo, $-\sqrt{9} = -3$.
- $\sqrt{-9}$ não se define no conjunto $\mathbb{R}$.

**2º caso:**

O índice *n* é ímpar.

Podemos dizer que:

> Dado um número real *a* e um número natural ímpar *n*, a expressão $\sqrt[n]{a}$ é igual ao número real *b*, tal que $b^n = a$.

Observe que nesse caso o radicando pode ser positivo ou negativo.
Veja alguns exemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.
- $\sqrt[5]{3125} = 5$, pois $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3\,125$.
- $\sqrt[5]{-3125} = -5$, pois $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -3\,125$.

**Observação:**

Sendo *n* um número natural maior ou igual a 2, define-se: $\sqrt[n]{0} = 0$.

- $\sqrt[2]{0} = 0$
- $\sqrt[25]{0} = 0$
- $\sqrt[103]{0} = 0$
- $\sqrt[7855]{0} = 0$

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Quantas das expressões seguintes não são definidas no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais?

$\sqrt[3]{-8}$ $\quad\sqrt{-1}$ $\quad\sqrt[4]{-16}$

$\sqrt[5]{32}$ $\quad\sqrt[10]{1}$ $\quad\sqrt[3]{-125}$

**2.** Quais dos números a seguir têm raiz quadrada definida no conjunto $\mathbb{R}$?

**a)** 36 **d)** 144 **g)** 100

**b)** −64 **e)** 10 **h)** −9

**c)** −81 **f)** −4 **i)** 25

**3.** Quando $a = 10$, $b = 21$ e $c = 8$, a expressão $\sqrt{b^2 - 4ac}$ é definida no conjunto $\mathbb{R}$? Qual é o valor dessa expressão?

**4.** Verifique se a expressão $\sqrt{x^2 - y^2}$ é definida no conjunto $\mathbb{R}$ quando $x = 13$ e $y = -12$.

**5.** Sabendo que todas as expressões seguintes são definidas no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, calcule o valor de cada uma.

**a)** $\sqrt{0{,}25}$

**b)** $\sqrt[3]{0{,}008}$

**c)** $\sqrt{(-8)^2}$

**d)** $-\sqrt{100}$

**e)** $\sqrt[7]{-1}$

**f)** $\sqrt[3]{-125}$

# Propriedades do radical

Toda expressão matemática que tenha forma $\sqrt[n]{a}$, com $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, recebe o nome de **radical aritmético**.

Em todo radical, podemos destacar:

$\sqrt[n]{a}$ — $n$: **índice**; $a$: **radicando**

Assim:

- No radical $\sqrt{5}$, o índice é 2, e o radicando é 5.
- No radical $\sqrt[3]{10}$, o índice é 3, e o radicando é 10.

Quer saber como se leem estes números?

$\sqrt{5}$ → **Raiz quadrada de cinco.**

$\sqrt[3]{10}$ → **Raiz cúbica de dez.**

$\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ → **Raiz quarta de dois terços.**


GRACELIN/SHUTTERSTOCK.COM

## Propriedades

Os radicais aritméticos apresentam propriedades importantes não só para o estudo dos radicais como também para estudos futuros de outros temas de Matemática. Conheça, a seguir, estas propriedades.

**1ª propriedade:**

$$\sqrt[n]{a^n} = a\text{, com } a \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Considere as expressões abaixo.

- $\sqrt[5]{32} = 2$ e $32 = 2^5$

  Então:

  $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

- $\sqrt[4]{81} = 3$ e $81 = 3^4$

  Então:

  $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

Dessa forma, temos:

- $\sqrt{7^2} = 7$
- $\sqrt[3]{10^3} = 10$
- $\sqrt[5]{(x+3)^5} = x + 3$, com $x + 3 \geqslant 0$.

**2ª propriedade:**

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}} \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ n, m, p \in \mathbb{N},\ n > 1,\ p \neq 0 \text{ e } p \text{ divisor comum de } m \text{ e } n.$$

Considere as expressões $\sqrt[8]{10^8}$ e $\sqrt{10^2}$

Usando a primeira propriedade, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[8]{10^8} = 10 \\ \sqrt{10^2} = 10\end{array}\right] \text{Comparando, temos } \sqrt[8]{10^8} = \sqrt{10^2}.$$

Veja o que fizemos: $\sqrt[8]{10^8} = \sqrt[8:4]{10^{8:4}} = \sqrt{10^2}$

Essa propriedade nos auxilia na simplificação de um radical do tipo $\sqrt[n]{a^m}$, quando existe um divisor comum (diferente de 1) dos números *n* e *m*.

Veja alguns exemplos de simplificação.

- $\sqrt[6]{10^4} = \sqrt[6:2]{10^{4:2}} = \sqrt[3]{10^2}$
- $\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12:6]{2^{6:6}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$
- $\sqrt[20]{2^5} = \sqrt[20:5]{2^{5:5}} = \sqrt[4]{2}$
- $\sqrt[25]{(xy)^{10}} = \sqrt[25:5]{(xy)^{10:5}} = \sqrt[5]{(xy)^2}$

**3ª propriedade:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, \text{ m, n, } \in \mathbb{N}, \text{ m} > 1 \text{ e n} > 1.$$

Observe as expressões $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ e $\sqrt[6]{64}$

Calculando:

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[6]{64} = 2$

Comparando, temos $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$.

Veja o que fizemos: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64}$.

Assim:

- $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5 \cdot 3]{2} = \sqrt[15]{2}$
- $\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[2 \cdot 2]{10} = \sqrt[4]{10}$

**4ª propriedade:**

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, \text{ n} \in \mathbb{N} \text{ e n} > 1.$$

Considerando as expressões $\sqrt{4 \cdot 25}$ e $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$.

Calculando, temos:

$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

Comparando, temos $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$

Então:

- $\sqrt{3 \cdot 11} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{11}$
- $\sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$
- $\sqrt[7]{4xy} = \sqrt[7]{4} \cdot \sqrt[7]{x} \cdot \sqrt[7]{y}$ com $x, y \in \mathbb{R}_+$.

**5ª propriedade:**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}_+^*,\ n \in \mathbb{N}, \text{ e } n > 1.$$

Considerando as expressões $\sqrt{\frac{25}{9}}$ e $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$.

$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$

Comparando, temos:

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$$

Portanto:

- $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$
- $\sqrt[5]{\frac{a}{5}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{5}}$ com $a \in \mathbb{R}_+$

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Dê o valor de cada uma das expressões.

**a)** $\sqrt[5]{3^5}$ **b)** $\sqrt[3]{7^3}$ **c)** $\sqrt[7]{(2 \cdot 5)^7}$ **d)** $\sqrt{(5a^2)^2}$

**2.** Decomponha o radicando em fatores primos e, em seguida, use uma das propriedades dos radicais aritméticos para encontrar o valor das expressões.

**a)** $\sqrt{49}$ **b)** $\sqrt[6]{729}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$ **d)** $\sqrt[10]{1024}$ **e)** $\sqrt[4]{81}$ **f)** $\sqrt[3]{343}$

**3.** Determine o valor do número *x* em cada uma das igualdades.

**a)** $\sqrt[14]{2^8} = \sqrt[x]{2^4}$ **b)** $\sqrt[15]{10^5} = \sqrt[3]{10^x}$ **c)** $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt{5^x}$ **d)** $\sqrt[10]{6^x} = \sqrt[5]{6}$

**4.** Dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número, diferente de zero, simplifique os radicais.

**a)** $\sqrt[15]{2^5}$ **b)** $\sqrt[14]{3^7}$ **c)** $\sqrt[16]{10^4}$ **d)** $\sqrt[10]{5^8}$

**5.** Decomponha o radicando em fatores primos e, em seguida, simplifique cada um dos radicais.

**a)** $\sqrt[10]{32}$ **b)** $\sqrt[9]{27}$ **c)** $\sqrt[16]{81}$ **d)** $\sqrt[6]{16}$ **e)** $\sqrt[8]{64}$ **f)** $\sqrt[12]{1024}$

**6.** Determine o número real *x* das igualdades.

**a)** $\sqrt[x]{\sqrt[6]{10}} = \sqrt[24]{10}$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[x]{3}} = \sqrt[15]{3}$

**7.** Escreva como um produto de radicais.

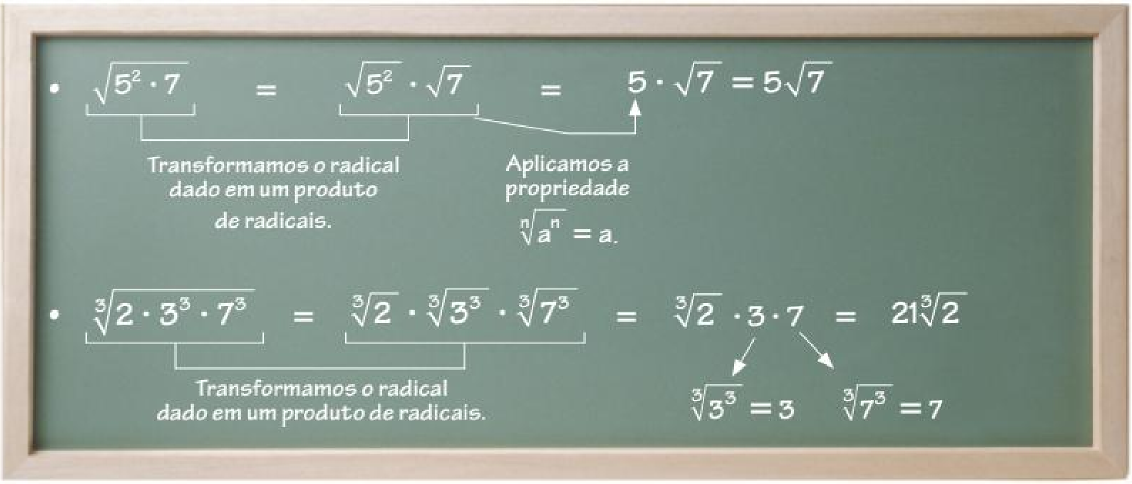
**a)** $\sqrt{5 \cdot 7}$ **b)** $\sqrt[3]{ax}$ **c)** $\sqrt[7]{3^2 \cdot 11}$ **d)** $\sqrt[6]{x \cdot y}$ **e)** $\sqrt{2ab}$ **f)** $\sqrt[3]{x^{2y}}$

**8.** Decomponha o radicando em fatores primos e escreva cada expressão na forma de um produto de radicais.

**a)** $\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt[6]{21}$ **c)** $\sqrt[9]{35}$ **d)** $\sqrt[7]{30}$ **e)** $\sqrt[10]{15}$ **f)** $\sqrt[3]{154}$

# Simplificando radicais

Observe as seguintes expressões:



KCKATE16/SHUTTERSTOCK.COM

Assim:

> Se um ou mais fatores do radicando têm o expoente igual ao índice do radical, de acordo com a propriedade $\sqrt[n]{a^n} = a$, esses fatores podem ser extraídos do radicando.

Em alguns casos, o expoente do radicando é maior que o índice do radical. Procura-se, então, fazer transformações convenientes no radicando, como você pode ver nas expressões a seguir.

- $\sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \cdot 10} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10} = 10\sqrt{10}$
- $\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt{2^3 \cdot 5^4} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 50\sqrt{2}$

Há situações, porém, em que temos necessidade de fazer uma fatoração do radicando antes de realizar a extração dos fatores.

Acompanhe algumas dessas situações.

**1** Simplificar a expressão $\sqrt{75}$.
Fatorando o radicando 75, vamos encontrar $3 \cdot 5^2$.
Daí, temos:
$\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{3}$

**2** Qual é a forma mais simples possível de escrita da expressão $\sqrt[3]{162}$? Fatorando o radicando 162, vamos encontrar $2 \cdot 3^4$. Daí, temos:

$$\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{2 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{6}$$

**3** Sabendo que $x$ e $y$ são números reais positivos, simplifique a expressão $\frac{2}{5}\sqrt{50x^{3y}}$.
Fatorando o radicando 50, vamos encontrar $2 \cdot 5^2$. Daí, temos:

$$\frac{2}{5}\sqrt{50x^3y} = \frac{2}{5}\sqrt{2\cdot 5^2\cdot x^2\cdot x\cdot y} = \frac{2}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5}\cdot x\cdot\sqrt{2\cdot x\cdot y} = 2x\sqrt{2xy}$$

Veja, a seguir, outra situação relacionada com a simplificação de radicais.

**4** Se $\ell$ é a medida do lado da figura de um quadrado, sua área é dada por $A = \ell^2$. Calcular a medida $\ell$ do lado de um terreno quadrado que tem 700 m² de área, considerando $\sqrt{7} \simeq 2{,}65$.
Temos: $A = \ell^2 \Rightarrow \ell \cdot \ell = A \Rightarrow \ell = \sqrt{A}$.
Então, $\ell$ é o número positivo que elevado ao quadrado resulta em $A$, ou seja, $\ell = \sqrt{A}$.
No caso, temos:

$$\ell = \sqrt{700} = \underbrace{\sqrt{2^2\cdot 5^2\cdot 7} = 2\cdot 5\cdot\sqrt{7}}_{\text{simplificando o radical}} = 10\cdot\sqrt{7} = 10\cdot 2{,}65 = 26{,}5$$

O lado desse terreno mede, aproximadamente, 26,5 m.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Retirando fatores do radicando, escreva da forma mais simples possível cada um dos radicais.

a) $\sqrt{3\cdot 11^2}$ c) $\sqrt[5]{2^5\cdot 3\cdot 5^5}$ e) $\sqrt{2^7}$
b) $\sqrt[6]{2^6\cdot 7}$ d) $\sqrt{6^3}$ f) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^4}$

**2.** Nos radicais seguintes, os números $x$ e $y$ são números reais positivos. Nessas condições, simplifique cada radical retirando fatores do radicando.

a) $\sqrt{x^5}$ d) $\sqrt[5]{y^{12}}$ g) $\sqrt[9]{y^{10}}$
b) $\sqrt[3]{y^4}$ e) $\sqrt{x^2y^3}$ h) $\sqrt[10]{x^{13}}$
c) $\sqrt{x^9}$ f) $\sqrt[5]{x^5y^7}$

**3.** Fatore o número que aparece no radicando e, a seguir, simplifique cada um dos radicais retirando fatores do radicando.

a) $\sqrt{75}$ e) $\sqrt[4]{176}$ i) $\sqrt{2\,700}$
b) $\sqrt{700}$ f) $\sqrt{800}$ j) $\sqrt[6]{640}$
c) $\sqrt[3]{250}$ g) 1800
d) $\sqrt[5]{192}$ h) $\sqrt[3]{375}$

**4.** Considere os seguintes valores:

- $\sqrt{2} = 1{,}41$
- $\sqrt{5} = 2{,}23$
- $\sqrt{3} = 1{,}73$
- $\sqrt{6} = 2{,}44$

Usando esses valores, simplifique os radicais e dê o valor de cada um na forma decimal.

a) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{150}$ g) $\sqrt{294}$
b) $\sqrt{27}$ e) $\sqrt{200}$ h) $\sqrt{675}$
c) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{500}$

**5.** Um terreno é quadrado e tem área de 5 184 metros quadrados. Qual é a medida de cada lado desse terreno?

**6.** Sabendo que $x = \sqrt{2\,304}$ e $y = \sqrt[6]{64}$, qual é o valor da razão $\frac{x}{y}$?

**7.** Transforme as expressões em um só radical e, depois, calcule o valor de cada uma.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{4\,096}}}$ b) $\sqrt{\sqrt{10\,000}}$

**8.** Para $a = 40$, $b = 25$ e $c = 200$, determine o valor numérico da expressão algébrica $\sqrt{c + ab}$.

## PARA QUEM QUER MAIS

### Heron e a área do triângulo

Heron de Alexandria, matemático grego que viveu por volta da segunda metade do século I, desenvolveu tantos e diferentes trabalhos sobre Física e Matemática que é costume apresentá-lo como um enciclopedista dessas áreas.


Heron de Alexandria ao centro da imagem.

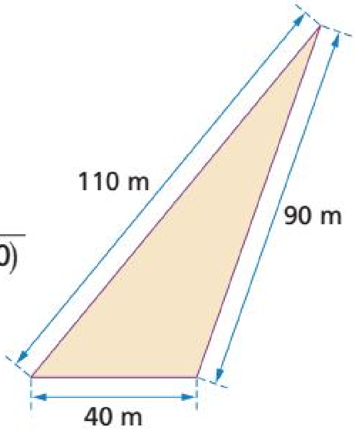
Dos trabalhos de Heron, o mais importante é **A métrica**, organizado em três livros. É no livro I dessa obra que se encontra a brilhante dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados.

Quando conhecemos as medidas *a*, *b* e *c* dos lados de um triângulo qualquer, podemos determinar a área desse triângulo usando a fórmula deduzida por Heron:

Área da figura de triângulo: $\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ com $p = \dfrac{a + b + c}{2}$.

Vamos resolver o problema a seguir aplicando a fórmula de Heron.

Uma praça pública tem a forma triangular. Na figura, estão indicadas as medidas dos lados dessa praça em metro. Qual é a área ocupada pela praça em metro quadrado? (Considere $\sqrt{2} = 1{,}4$.)




De acordo com a figura, vamos considerar:

$a = 110$ m, $b = 90$ m e $c = 40$ m

Assim, temos:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{110 + 90 + 40}{2} = \frac{240}{2} = 120 \longrightarrow p = 120 \text{ m}$$

Usando a fórmula deduzida por Heron, temos:

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{120\,(120 - 110)(120 - 90)(120 - 40)}$$

$$A = \sqrt{120 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 80} = \sqrt{2\,880\,000} = \sqrt{288 \cdot 10\,000} =$$

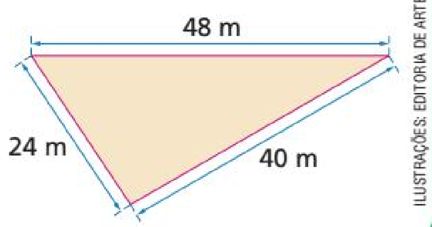
$$= \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 100^2}$$

$$A = 1\,200\sqrt{2} = 1\,200 \cdot 1{,}4 = 1\,680$$

A área ocupada pela praça é de 1 680 $m^2$.

Responda no caderno.

**1.** Um terreno tem a forma triangular, e suas medidas estão indicadas na figura ao lado.
Qual é a área desse terreno? (Use $\sqrt{14} = 3{,}7$.)



# Introduzindo um fator externo no radical

A introdução de um fator externo no radicando pode ser feita de acordo com as propriedades dos radicais.

Do mesmo modo que quando simplificamos radicais podemos extrair fatores do radicando, também podemos, se necessário, introduzir um fator externo no radical sem alterar o valor da expressão. Observe no exemplo a seguir que a igualdade se mantém:

$$\underbrace{2\sqrt{3}}_{\text{Presença de fator externo}} = \underbrace{\sqrt{2^2 \cdot 3}}_{\text{Sem fator externo}}$$

De modo geral, temos que um fator externo pode ser introduzido como fator no radicando, bastando para isso escrevê-lo com um expoente igual ao índice do radical.

Acompanhe mais estes exemplos:

**1** Introduzir no radicando o fator externo da expressão $5\sqrt{3}$.

$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

**2** Transformar em um só radical a expressão $\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}$ com $x \geqslant 0$.

Neste problema, devemos inicialmente introduzir o fator *x* no radical mais interno:

$\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^3 \cdot x}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[15]{x^4}$

pela propriedade: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Introduza o fator externo no radicando das expressões seguintes.

a) $9\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{7}$
c) $10\sqrt{5}$
d) $5\sqrt[3]{2}$
e) $2\sqrt[5]{2}$
f) $8\sqrt{a}$
g) $2a\sqrt{a}$
h) $x\sqrt[10]{x^3}$
i) $6b\sqrt[3]{2b}$

**2.** Transforme cada expressão em um só radical, sabendo que *x* e *y* são dois números reais positivos.

a) $\sqrt[6]{x\sqrt[3]{x^2}}$

b) $\sqrt{x\sqrt[5]{x^2y^3}}$

**3.** Escreva a expressão $\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}$ na forma de um único radical. Se possível, simplifique a expressão.

**4.** Como você pode representar a expressão $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ na forma de um único radical?

**5.** Qual é a forma mais simples de escrever a expressão $\sqrt{\frac{x^3}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}$ ?

# Adição algébrica de radicais

Consideremos a expressão algébrica inteira $9x + 3x - 15x + 8x - x$. Como todos os termos dessa expressão são semelhantes, podemos reduzi-la a um só termo:

$$9x + 3x - 15x + 8x - x = (9 + 3 - 15 + 8 - 1)\,x = 4x$$

Dois ou mais radicais são **semelhantes** quando têm o mesmo índice e o mesmo radicando. Observe:

- $\sqrt{10}$ e $-3\sqrt{10}$ são radicais semelhantes.
- $\sqrt[3]{2}$, $-10\sqrt[3]{2}$ e $7\sqrt[3]{2}$ são radicais semelhantes.

Se uma expressão contiver radicais semelhantes, também podemos reduzi-la a um só termo. Vamos, então, considerar as seguintes situações:

**SAIBA QUE**

Só é possível a adição de radicais semelhantes.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

**1** Reduzir a um só termo a expressão $10\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$.

Observe que $\sqrt{3}$ é o fator comum a todos os termos.

$$10\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (10 + 5 - 11 + 2)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

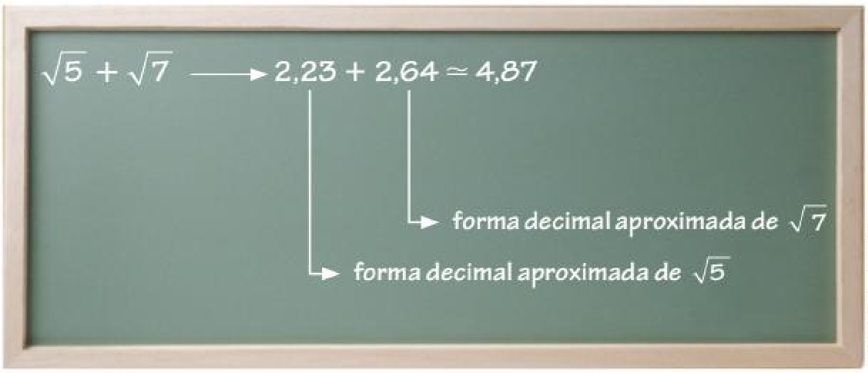
Logo, $6\sqrt{3}$ é a forma mais simples da expressão dada.

**2** Simplificar a expressão $6\sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$.

$$6\sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{7} = 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 1\sqrt{5} + 1\sqrt{7} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

$\sqrt{5} + \sqrt{7}$ é a forma mais simples de escrever a expressão dada usando radicais, pois não há radicais semelhantes.

Porém, podemos encontrar valores aproximados para os radicais e em seguida adicioná-los.




PHOTODISC/GETTY IMAGES

O mesmo ocorre com expressões como:

- $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

  $2{,}23 - 1{,}41 \simeq 0{,}82$

- $3 + \sqrt{3}$

  $3 + 1{,}73 \simeq 4{,}73$

Há expressões que exigem a simplificação de seus termos antes da realização da adição. Observe os exemplos a seguir.

**1** Calcular o valor de $\sqrt{50} + \sqrt{18}$.

Como $50 = 2 \cdot 5^2$ e $18 = 2 \cdot 3^2$, vamos, então, simplificar cada radical com a extração de fatores do radicando:

$$\sqrt{50} + \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 3^2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Logo, o valor procurado é $8\sqrt{2}$.

**2** Simplificar a fração $\dfrac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}}$.

$$\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5^2}}{2\sqrt{3 \cdot 7^2}} = \frac{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

**3** Escrever a forma mais simples da expressão $\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45}$.

$$\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 5} =$$
$$= 10\sqrt{2} + 10\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 10\sqrt{5} - 3\sqrt{5} =$$
$$= (10 + 2)\sqrt{2} + (10 - 3)\sqrt{5} = 12\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$$

Logo, a forma mais simples da expressão dada é $12\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Reduza as seguintes expressões a sua forma mais simples.

**a)** $\sqrt{12} + \sqrt{75} - 9\sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{48}$

**b)** $4\sqrt{125} + 3\sqrt{45} - 30\sqrt{5}$

**c)** $\sqrt{54} + \sqrt{6} - \sqrt{150} + 2\sqrt{24}$

**2.** Um número real *P* é tal que $P = \sqrt{72} + 3\sqrt{200} + \sqrt{392}$. Qual é o valor do número *P*?

(Considere: $\sqrt{2} = 1{,}41$.)

**3.** Qual é a forma simplificada de cada uma das frações?

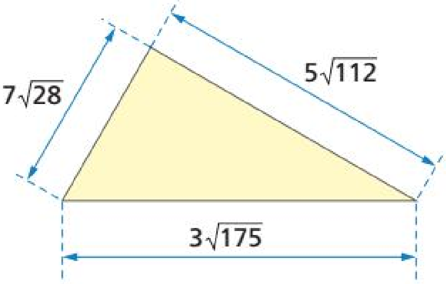
**a)** $\dfrac{\sqrt{28} + \sqrt{175}}{\sqrt{63}}$  **b)** $\dfrac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{200}}$

**4.** Os lados de um triângulo medem $4\sqrt{486}$ cm, $4\sqrt{96}$ cm e $5\sqrt{216}$ cm. Simplifique os radicais e calcule o perímetro desse triângulo.

(Use: $\sqrt{6} = 2{,}45$.)

**5.** Um terreno com forma triangular tem as medidas, em metro, como indicado na figura. Qual é o perímetro desse terreno?

(Considere $\sqrt{7} = 2{,}65$.)




EDITORIA DE ARTE

**6.** Sabendo que

$A = \sqrt{243} - \sqrt{162}$ e $B = \sqrt{300} - \sqrt{50}$

determine o valor da expressão A + B.

# Multiplicação e divisão de radicais com mesmo índice

Recordando as propriedades dos radicais aritméticos, uma delas nos mostra que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\text{, com } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Usando a propriedade simétrica das igualdades, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\text{, com } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Dessa maneira, temos:

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2 \cdot 7} = \sqrt{14}$
- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{5 \cdot 6} = \sqrt[3]{30}$

Assim:

O produto de dois ou mais radicais de mesmo índice é um radical com o mesmo índice, cujo radicando é igual ao produto dos radicandos desses radicais.

## Utilizando a propriedade distributiva na multiplicação de radicais

Acompanhe as situações a seguir.

**1** Calcular $\sqrt{5} \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{5})$

$$\sqrt{5} \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$$
$$= 3\sqrt{10} - \sqrt{5^2} = 3\sqrt{10} - 5$$

**2** Calcular $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$

$$= \sqrt{3^2} - 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 10\sqrt{2^2} =$$
$$= 3 - 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 20 =$$
$$= \underbrace{3 - 20}_{-17} - \underbrace{5\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}_{3\sqrt{6}} = -17 - 3\sqrt{6}$$

## Dividindo expressões com radicais de mesmo índice

Por uma das propriedades dos radicais, sabemos que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \geqslant 0,\ b > 0,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

E pela propriedade simétrica das igualdades, podemos escrever:

$$\text{Se } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ então } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ com } a \geqslant 0,\ b > 0,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Agora, observe as seguintes divisões:

- $\sqrt{40} : \sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{40}{5}} = \sqrt{40 : 5} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{96} : \sqrt[3]{2} = \dfrac{\sqrt[3]{96}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{96}{2}} = \sqrt[3]{96 : 2} = \sqrt[3]{48} = 2\sqrt[3]{6}$

Temos que:

O quociente de dois radicais de mesmo índice é um radical com o mesmo índice, cujo radicando é igual ao quociente dos radicandos desses radicais.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Efetue cada multiplicação e simplifique o resultado.

**a)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}$

**b)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{27}$

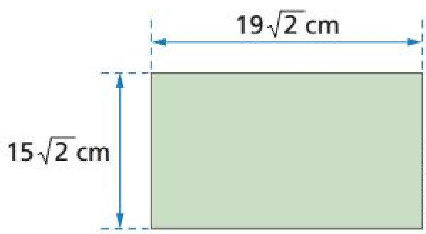
**c)** $\sqrt{42} \cdot \sqrt{28}$

**d)** $2\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{30}$

**e)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{12} \cdot 10\sqrt{3}$

**f)** $6\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{21}$

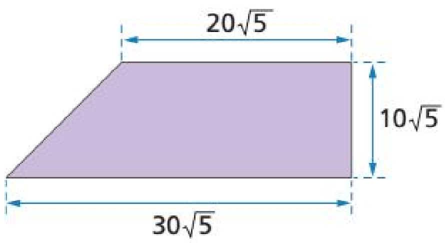
**2.** Dê o perímetro e a área da região retangular representada pela figura.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**3.** A área de um trapézio é dada pela fórmula $A = \dfrac{(B + b)h}{2}$ em que *B* representa a medida da base maior, *b* representa a medida da base menor, e *h* representa a medida da altura.

Calcule a área do terreno representado pela figura, cujas medidas são dadas em metro.



**4.** Qual é a expressão, na forma mais simples possível, que se obtém quando efetuamos as multiplicações a seguir?

**a)** $\sqrt{5} \cdot (7 + \sqrt{5})$ **c)** $\sqrt{8} \cdot (2 - \sqrt{6})$

**b)** $\sqrt{15} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})$

**5.** Qual é a expressão que representa o resultado da multiplicação $(7 - 5\sqrt{3}) \cdot (2 - 8\sqrt{3})$?

**6.** Usando a multiplicação, escreva a expressão que representa cada uma das potências a seguir.

**a)** $(1 + \sqrt{10})^2$ **c)** $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$

**b)** $(3 - \sqrt{5})^2$ **d)** $(\sqrt{10} - \sqrt{7})^2$

**7.** Dê o resultado de cada uma das seguintes divisões:

**a)** $\sqrt{15} : \sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{162} : \sqrt{3}$

**b)** $\sqrt[4]{21} : \sqrt[4]{7}$ **d)** $\sqrt{240} : \sqrt{6}$

**8.** Simplifique as expressões.

**a)** $\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{486}}{\sqrt{3}}$

**b)** $\sqrt{54} \cdot \sqrt{3}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{3}}$

**9.** Qual é o número que representa o quociente $\dfrac{(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{6})} : \dfrac{(\sqrt{6} - 2)}{\sqrt{3}}$?

# Redução de dois ou mais radicais ao mesmo índice

Acompanhe e analise as situações a seguir.

**1** Vamos considerar os radicais $\sqrt[3]{7^2}$ e $\sqrt[4]{6^3}$.

Podemos reduzir esses radicais a um mesmo índice, que deve ser múltiplo comum dos índices 3 e 4. Assim, temos: 12, 24, 36, 48, 60, ... Vamos escolher o menor deles: o 12. Agora, observe:

$$\sqrt[3]{7^2} \xrightarrow{\times 4 \;\; \times 4} \sqrt[12]{7^8} \qquad \sqrt[4]{6^3} \xrightarrow{\times 3 \;\; \times 3} \sqrt[12]{6^9}$$

Então:

$$\underbrace{\sqrt[3]{7^2}\ ,\ \sqrt[4]{6^3}}_{\text{radicais com índices diferentes}} \longrightarrow \underbrace{\sqrt[12]{7^8}\ ,\ \sqrt[12]{6^9}}_{\text{radicais equivalentes (com o mesmo índice)}}$$

**2** Consideremos, agora, os radicais $\sqrt[8]{a^5}$ e $\sqrt[6]{a^3}$, com $a \geqslant 0$.

Vamos reduzir esses radicais a um mesmo índice, que deverá ser múltiplo comum de 8 e 6. Assim, temos: 24, 48, 72, 96, 120, ... Por facilidade, escolhemos o menor deles: o 24.

$$\sqrt[8]{a^5} \xrightarrow{\times 3 \;\; \times 3} \sqrt[24]{a^{15}} \qquad \sqrt[6]{a^3} \xrightarrow{\times 4 \;\; \times 4} \sqrt[24]{a^{12}}$$

Então:

$$\underbrace{\sqrt[8]{a^5}\ ,\ \sqrt[6]{a^3}}_{\text{radicais com índices diferentes}} \longrightarrow \underbrace{\sqrt[24]{a^{15}}\ ,\ \sqrt[24]{a^{12}}}_{\text{radicais equivalentes (com o mesmo índice)}}$$

# Multiplicação e divisão de radicais com índices diferentes

A redução de dois ou mais radicais ao mesmo índice nos possibilita efetuar a multiplicação e a divisão de radicais que inicialmente apresentam índices diferentes.

Acompanhe e analise os exemplos a seguir.

**1** Vamos calcular $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[10]{2^3}$

Como os radicais têm índices diferentes, precisamos, primeiro, reduzi-los ao mesmo índice para, depois, efetuar a multiplicação.

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[20]{2^5} \cdot \sqrt[20]{2^6}$$

**2** Calcular $\sqrt{10} : \sqrt[3]{10}$. Inicialmente, reduzimos os dois radicais ao mesmo índice e, em seguida, efetuamos a divisão. Observe:

$$\sqrt{10} : \sqrt[3]{10} = \sqrt[6]{10^3} : \sqrt[6]{10^2} = \sqrt[6]{10^3 : 10^2} = \sqrt[6]{10}$$

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Reduza ao mesmo índice cada conjunto de radicais a seguir.

a) $\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}$

b) $\sqrt[7]{a^3}, \sqrt[3]{b^2}$

c) $\sqrt[5]{3^2}, \sqrt[4]{3^3}$

d) $\sqrt[14]{2^5}, \sqrt[21]{2^9}$

e) $\sqrt[10]{3^2}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[15]{2^4}$

f) $\sqrt[5]{3^4}, \sqrt[10]{6}, \sqrt{2}$

**2.** Reduza cada par de radicais ao mesmo índice e, em seguida, compare os valores obtidos usando o sinal $>$ ou $<$.

a) $\sqrt[10]{2}$ e $\sqrt[15]{2^2}$

b) $\sqrt[12]{3^{10}}$ e $\sqrt[18]{3^{11}}$

c) $\sqrt[8]{2^3}$ e $\sqrt[6]{2^3}$

**3.** Vamos efetuar as operações indicadas e, quando possível, simplificar cada resultado.

a) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[5]{10}$

b) $\sqrt{7} : \sqrt[5]{7}$

c) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}$

d) $\sqrt{2} : \sqrt[20]{2^7}$

e) $\sqrt[6]{5^2} : \sqrt[10]{5^3}$

f) $\sqrt[6]{7^5} : \sqrt[3]{7^2}$

g) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[10]{2^7}$

h) $\sqrt[8]{6^5} : \sqrt[12]{6^2}$

**4.** Em cada uma das expressões, *a* e *b* são números reais positivos. Escreva, então, a expressão algébrica que representa o resultado de:

a) $\sqrt[8]{a^5b^3} : \sqrt[6]{ab^2}$

b) $\sqrt[9]{a^7b^6} : \sqrt[6]{a^3b^2}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} : \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

d) $\sqrt[4]{a^5b^3} : \sqrt[12]{a^{10}b^9}$

e) $\dfrac{\sqrt[6]{(ab)^5}}{\sqrt[4]{ab^3}}$

**5.** (Fuvest-SP) Se $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt[4]{2}$, então o valor de $a \cdot b$ é:

a) $\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[4]{4}$

c) $\sqrt{4}$

d) $\sqrt[8]{4}$

e) $\sqrt[8]{8}$

# Potenciação de radicais

Considere as seguintes potências:

$(\sqrt{10})^2$, $(\sqrt{7})^3$, $(\sqrt[5]{2})^3$

Usando a definição de potência (produto de fatores iguais), temos:

- $(\sqrt{10})^2 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{10^2} = 10$
- $(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7^3} = \sqrt{7^2 \cdot 7} = 7\sqrt{7}$
- $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^3}$

Assim, de modo geral:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}\text{, com } a \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Então:

- $(\sqrt{3})^5 = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 9\sqrt{3}$
- $(\sqrt[3]{10})^4 = \sqrt[3]{10^4} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 10} = 10\sqrt[3]{10}$

Nas expressões que envolvem radicais, podemos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação. Veja:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{3})^2 =$$
$$= 5 + 2\sqrt{15} + 3 = 8 + 2\sqrt{15}$$

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Vamos calcular:

**a)** $(\sqrt{21})^2$

**b)** $(\sqrt[3]{4})^2$

**c)** $(8\sqrt{3})^2$

**d)** $(\sqrt[4]{2})^9$

**e)** $\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2$

**f)** $(\sqrt[6]{8})^2$

**2.** Nas expressões seguintes, os números *a* e *b* são reais positivos. Nessas condições, escreva a forma mais simples de cada expressão algébrica.

**a)** $(a\sqrt{b})^2$

**b)** $(b\sqrt[3]{a})^4$

**c)** $(ab\sqrt[3]{b})^4$

**d)** $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^2$

**3.** Um número real *A* é tal que $A = 5\sqrt{32} - (2\sqrt{2})^3$. Qual é o valor de *A*?

**4.** São dados os números reais $x = 2\sqrt{10}$ e $y = 10\sqrt{2}$. Qual é o valor da expressão $x^2y^2$?

**5.** Consideramos os números reais $a = 3\sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{3}$.
Determine a razão $\frac{a}{b}$, dando a resposta na forma de número decimal.

**6.** Aplicando a propriedade distributiva, calcule:

**a)** $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

**b)** $(1 - \sqrt{7})^2$

**c)** $(4\sqrt{2} + 5)(4\sqrt{2} - 5)$

**d)** $(2 + \sqrt{10})^2$

**e)** $(\sqrt{11} + \sqrt{7})(\sqrt{11} - \sqrt{7})$

**f)** $(3\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

# Racionalização de denominadores

Consideremos, inicialmente, a expressão $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Adotando $\sqrt{3} = 1{,}732$ (aproximação com três casas decimais), vamos encontrar a forma decimal aproximada da expressão $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq \frac{1}{1{,}732} \simeq 0{,}577.$$

PHOTODISC/GETTY IMAGES

Voltemos a considerar a expressão $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Usando a propriedade da equivalência de frações, multiplicamos o numerador e o denominador dessa expressão pelo mesmo número $\left(\sqrt{3}\right)$ e determinamos, em seguida, a forma decimal aproximada do resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}577$$

PHOTODISC/GETTY IMAGES

Como você pôde observar, as expressões $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$ são equivalentes. Obtivemos o mesmo resultado na forma decimal aproximada: 0,577.

A uma transformação em que o denominador é um número racional damos o nome de **racionalização de denominadores**.

Essa racionalização consiste em transformar uma expressão com denominador contendo números irracionais em uma expressão equivalente com denominador contendo apenas números racionais.

Vejamos, então, mais um caso de racionalização de denominadores.

**1** Racionalizar o denominador da expressão $\frac{5}{3\sqrt{10}}$.

Multiplicando $3\sqrt{10}$ por $\sqrt{10}$ temos:

$3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{10^2} = 3 \cdot 10 = 30$

Dizemos que $\sqrt{10}$ é o fator racionalizante da expressão $\frac{5}{3\sqrt{10}}$.

$$\frac{5}{3\sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{3\sqrt{10} \cdot 10} = \frac{5\sqrt{10}}{3 \cdot \sqrt{10^2}} = \frac{5\sqrt{10}}{3 \cdot 10} = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

$\frac{\sqrt{10}}{6}$ → **expressão equivalente com denominador racional**

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Racionalize o denominador de cada uma das expressões.

a) $\frac{2}{\sqrt{10}}$
b) $\frac{6}{\sqrt{6}}$
c) $\frac{9}{\sqrt{3}}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
e) $\frac{20}{2\sqrt{5}}$
f) $\frac{3}{\sqrt{6}}$
g) $\frac{20}{3\sqrt{10}}$
h) $\frac{1}{\sqrt{7}}$
i) $\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$
j) $\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

**2.** Dadas as expressões a seguir, racionalize os denominadores.

a) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
b) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
c) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
e) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
f) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

**3.** Você já aprendeu que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Nessas condições, racionalize o denominador de cada uma das seguintes expressões.

a) $\sqrt{\frac{3}{10}}$
b) $\sqrt{\frac{3}{5}}$
c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$
d) $\sqrt{\frac{1}{8}}$
e) $\sqrt{\frac{5}{3}}$
f) $\sqrt{\frac{5}{8}}$

**4.** Determine, na forma decimal, o valor de cada expressão a seguir. (Use: $\sqrt{6} = 2{,}449$; $\sqrt{2} = 1{,}414$ e $\sqrt{10} = 3{,}162$.)

a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
b) $\sqrt{\frac{2}{5}}$
c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$
d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

**5.** Racionalize os denominadores das expressões.

a) $\frac{1}{\sqrt[5]{6^3}}$
b) $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$
c) $\frac{2}{\sqrt[9]{2^7}}$
d) $\frac{6}{\sqrt[10]{3^5}}$
e) $\frac{4}{\sqrt[4]{8^3}}$
f) $\frac{20}{\sqrt[11]{10^8}}$

**6.** Racionalize o denominador das seguintes expressões:

a) $\frac{1}{3-\sqrt{6}}$
b) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$
c) $\frac{11}{2\sqrt{3}-1}$
d) $\frac{2-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$
e) $\frac{2-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$
f) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

# Potência com expoente racional

Já estudamos expressões da forma $10^2$, $6^{-1}$ e $2^0$, que são potências com expoentes inteiros, cujos significados já conhecemos:

$$10^2 = 100 \qquad 6^{-1} = \frac{1}{6} \qquad 2^0 = 1$$

Mas qual será o significado de uma potência com expoente fracionário? Vamos considerar algumas situações.

**1** Qual é o significado de $2^{\frac{3}{4}}$?

- (I) Consideremos um número real *y*, tal que $y = 2^{\frac{3}{4}}$.

  Se elevarmos os dois membros à 4ª potência, teremos:

  $y = 2^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y^4 = \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^4 \Rightarrow y^4 = 2^3$

- (II) Consideremos um número real *x*, tal que $x = \sqrt[4]{2^3}$.

  Elevando os dois membros à 4ª potência e utilizando as propriedades de radicais, temos:

  $x = \sqrt[4]{2^3} \Rightarrow x^4 = \sqrt[4]{2^{12}} \Rightarrow x^4 = 2^3$

  Comparando (I) e (II), obtemos:

  $x^4 = 2^3$ e $y^4 = 2^3$

  Como $x > 0$ e $y > 0$, temos:

  $x^4 = y^4 \Rightarrow x = y$

  Na expressão acima, como os expoentes são iguais, as bases positivas também são iguais.

  Daí, podemos escrever:

  $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

**2** Vamos considerar, agora, o radical $\sqrt[5]{2^{20}}$.

Como o radicando $2^{20}$ pode ser escrito na forma $(2^4)^5$, é possível fazer: $\sqrt[5]{2^{20}} = \sqrt[5]{(2^4)^5} = 2^4$.

Ocorre que o expoente 4 pode ser escrito na forma $\frac{20}{5}$ $\left(4 \text{ e } \frac{20}{5} \text{ expressam o mesmo número}\right)$.

É possível, portanto, escrever: $\sqrt[5]{2^{20}} = 2^4 = 2^{\frac{20}{5}}$.

$2^{\frac{20}{5}} \longrightarrow$ **potência com expoente fracionário**

O mesmo podemos fazer quando temos, por exemplo:

- $\sqrt[3]{10^{12}} = 10^{\frac{12}{3}}$
- $\sqrt[6]{2^{30}} = 2^{\frac{30}{6}}$

Você pôde observar que, nos exemplos dados, o expoente do radicando é múltiplo do índice do radical.

Porém, mesmo quando isso não ocorre, procedemos dessa maneira. Veja:

- $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$
- $\sqrt[3]{10^2} = 10^{\frac{2}{3}}$
- $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[8]{3^5} = 3^{\frac{5}{8}}$

Assim, podemos escrever:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Acompanhe as seguintes situações:

**1** Qual é o valor da expressão $81^{0,75}$?

Inicialmente, fazemos

$$0,75 = \frac{75}{100} \xrightarrow{:\,25} = \frac{3}{4}.$$

Decompondo 81, temos $81 = 3^4$.

$81^{0,75} = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 3^3 = 27$

Logo: $81^{0,75} = 27$

**2** Qual é o número real expresso por $36^{-\frac{1}{2}}$

Decompondo 36, encontramos $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$.

$36^{-\frac{1}{2}} = (6^2)^{-\frac{1}{2}} = 6^{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

Logo $36^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$.


WAVEBREAK MEDIA/EASYPIX BRASIL

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** **Escreva na forma de potência com expoente fracionário os seguintes radicais:**

**a)** $\sqrt[7]{2^3}$ **d)** $\sqrt{2^5}$ **g)** $\sqrt{11}$

**b)** $\sqrt[5]{10^4}$ **e)** $\sqrt[6]{2}$ **h)** $\sqrt[4]{2^3}$

**c)** $\sqrt[3]{7^2}$ **f)** $\sqrt[9]{5}$

**2.** **Escreva na forma de radical as seguintes potências com expoentes fracionários:**

**a)** $5^{\frac{2}{3}}$ **d)** $7^{\frac{1}{2}}$ **g)** $6^{\frac{3}{2}}$

**b)** $3^{\frac{5}{7}}$ **e)** $6^{\frac{4}{3}}$ **h)** $7^{\frac{4}{9}}$

**c)** $10^{\frac{3}{4}}$ **f)** $8^{\frac{5}{7}}$

**3.** **Sabendo que *x* é um número real positivo, escreva na forma de uma única potência de base *x* (com $x > 0$) a expressão $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$ Em seguida, escreva a potência obtida na forma de radical.**

**4.** **Escreva na forma de uma única potência de 3:**

**a)** $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

**b)** $3^{\frac{2}{3}} : 3^{-\frac{1}{6}}$

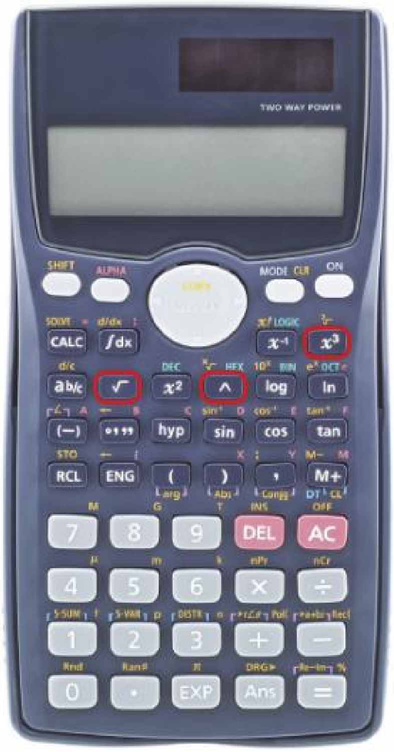
**c)** $27^{\frac{1}{6}}$

# Calculando raízes com a calculadora científica

Vamos aprender como trabalhar com a radiciação usando uma calculadora científica.

Nem todos os modelos de calculadora científica apresentam as três teclas destacadas na foto ao lado, afinal existem diversos modelos disponíveis. Se esse for o caso da calculadora que você está usando, pesquise quais as teclas que possuem função semelhante às destacadas. Se necessário, junte-se a um colega.

Observe nos quadros a seguir algumas funções das teclas destacadas.



Calculadora científica.

MONGPIMMIE/SHUTTERSTOCK.COM

---

A tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ é utilizada para calcular a raiz quadrada de um número. Essa tecla também é encontrada em algumas calculadoras simples.

Para calcular $\sqrt{169}$, por exemplo, devemos seguir o seguinte passo a passo:

**1.** Clique em $\boxed{\sqrt{\ }}$ e digite o radicando 169.

**2.** Para finalizar, aperte a tecla $\boxed{=}$. No visor vai aparecer o número 13.

---

A tecla $\boxed{x^3}$ é utilizada para o cálculo de potências de expoente 3. Contudo, a função desejada é a função secundária, ou seja, a que está em amarelo e que é usada para o cálculo de raízes cúbicas.

Vamos ver uma aplicação? Por exemplo, o cálculo de $\sqrt[3]{8}$. Para fazer esse cálculo, adotamos o seguinte procedimento:

**1.** Apertamos a tecla $\boxed{\text{Shift}}$ e habilitamos a função secundária do teclado.

**2.** Em seguida, clicamos em $\boxed{x^3}$.

**3.** No visor aparecerá o radical com índice 3.

**4.** Depois, digitamos o radicando, que, nesse caso, é 8.

**5.** Por fim, apertamos a tecla $\boxed{=}$. No visor vai aparecer o número 2.

Como no caso anterior, também vamos usar a função secundária da tecla ^.

A função secundária dessa tecla calcula raízes com qualquer valor para o índice. Veja, por exemplo, como calcular $\sqrt[4]{1296}$.

1. Digite o valor do índice, no caso, 4.
2. Por meio da tecla **Shift**, habilitamos a função secundária e, em seguida, clicamos em ^. Aparecerá na tela o radical e no lugar do índice vai aparecer *x*.
3. Digitamos o radicando, neste caso, 1 296.
4. Para finalizar, aperte a tecla =. No visor vai aparecer o número 6.

Vamos efetuar alguns cálculos com expoentes fracionários, escritos na forma decimal.

Veja, por exemplo, como calcular $49^{0,5}$.

1. Digite o valor da base, no caso, 49.
2. Como no caso anterior, também vamos usar a função secundária da tecla ^.
3. Digitamos o expoente, 0,5.
4. Para finalizar, aperte a tecla =. No visor vai aparecer o número 7.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Agora que você já viu alguns recursos da calculadora científica para o cálculo de raiz, resolva:

**a)** $\sqrt[5]{32\,768}$

**b)** $\sqrt{784}$

**c)** $\sqrt[3]{46\,656}$

**d)** $\sqrt[10]{1048\,576}$

**e)** $16^{0,25}$

**f)** $32^{0,2}$

**g)** $121^{0,5}$

# RETOMANDO O QUE APRENDEU

**1.** Observe as afirmações e verifique se são verdadeiras ou falsas. Use V ou F para identificar cada caso.

**a)** O número $3,\overline{8}$ não pertence ao conjunto dos números irracionais.

**b)** O número $\sqrt{7}$ pertence ao conjunto dos números irracionais.

**c)** Todo número racional também é um número irracional.

**d)** O número $\sqrt{81}$ pertence ao conjunto dos números racionais.

**e)** O número $5,\overline{80}$ pertence ao conjunto dos números naturais.

**2.** A representação decimal de um número pode ser: finita, infinita e periódica ou, ainda, infinita e não periódica. Escreva qual é o caso de cada um dos números a seguir.

**a)** $\frac{27}{6}$ **b)** $0,\overline{23}$ **c)** $\sqrt{2}$

**3.** Observe os números a seguir e responda às questões:

$-97; \frac{3}{5}; -\sqrt{3}; \frac{49}{7}; 1,\overline{25}; \pi$

**a)** Alguns desses números pertencem ao conjunto dos números naturais? Qual?

**b)** Quais números pertencem ao conjunto dos números inteiros?

**c)** Quais números são irracionais?

**d)** Quais números são reais, mas não são racionais?

**e)** Quais números são reais, mas não são irracionais?

**4.** Qual é o resultado da expressão

$\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$?

**a)** $\sqrt{5}$ **d)** $10\sqrt{5}$

**b)** $2\sqrt{5}$ **e)** $-10$

**c)** 10

**5.** Qual é o número que se obtém simplificando a expressão

$\sqrt[5]{31+\sqrt[6]{10-\sqrt{83-\sqrt{4}}}}$ ?

**a)** 2 **d)** 4

**b)** 1 **e)** 6

**c)** 3

**6.** A expressão numérica $81^{\frac{1}{2}} + 32^{\frac{1}{5}}$ tem valor:

**a)** 7 **d)** 10

**b)** 8 **e)** 11

**c)** 9

**7.** Sabendo que $\sqrt{2} + x = 4\sqrt{2}$ e $\sqrt{3} \cdot y = 5\sqrt{6}$, calcule o valor de $x + y$.

**a)** $2\sqrt{2}$ **d)** $8\sqrt{2}$

**b)** $4\sqrt{2}$ **e)** $10\sqrt{2}$

**c)** $5\sqrt{2}$

**8.** Sendo $a = \sqrt{24}$ e $b = \sqrt[4]{36}$, o valor do produto ab será:

**a)** $2\sqrt{6}$ **d)** $4\sqrt{6}$

**b)** 6 **e)** 24

**c)** 12

**9.** A expressão $\left(\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^9}}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2^9}}\right)^5$ é igual a:

**a)** 2 **d)** $\sqrt[10]{2}$

**b)** $2\sqrt{2}$ **e)** 32

**c)** $\sqrt{32}$

**10.** Qual é o valor da expressão

$\sqrt{32} + 4\sqrt{8} - \sqrt{50} - \left(\sqrt{2}\right)^3$?

**a)** $5\sqrt{2}$ **d)** $6\sqrt{2}$

**b)** $\sqrt{2}$ **e)** $-\sqrt{2}$

**c)** $-5\sqrt{2}$

**11.** Se $x = 1 - \sqrt{3}$ e $y = -1 + \sqrt{3}$, o número real que expressa o valor $x^2 - y^2$ é:

a) $\sqrt{3}$
b) 1
c) $-1$
d) 0
e) 2

**12.** Sabendo que $\sqrt[x]{\sqrt{2}} = \sqrt[12]{2}$ e $\sqrt[3]{\sqrt[y]{5}} = \sqrt[15]{5}$, o valor de $x - y$ é:

a) 1
b) 0
c) 6
d) 5
e) 10

**13.** Qual é o número inteiro que você obtém quando simplifica a expressão

$$3\sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 3}?$$

a) 1
b) 5
c) 10
d) $-10$
e) $-5$

**14.** Se $A = 8^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{4}} - (-2)^2 + 8^{\frac{4}{3}}$ então *A* vale:

a) 20
b) 18
c) 16
d) 14
e) 10

**15.** O valor da expressão

$$32^{0,2} + 27^{0,5} - \frac{(108)^{\frac{1}{2}}}{2} + (0,0016)^{0,25} \text{ é:}$$

a) 2
b) 2,2
c) 22
d) $2,2 + 6\sqrt{3}$
e) $22 + 6\sqrt{3}$

## UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, ampliamos nossos estudos sobre o conjunto dos números reais e foi possível explorar: os números irracionais e sua descoberta pela Geometria, o número $\pi$, os números reais, o cálculo com radicais, iniciando pela raiz enésima de um número real, seguindo pelas propriedades operatórias dos radicais, pela simplificação, pela adição algébrica, pela multiplicação e pela divisão, chegando à potenciação de expressões com radicais.

Para melhor organizar o estudo dos cálculos com radicais, sugerimos que você faça um breve resumo de cada propriedade contendo um ou mais exemplos que achar relevantes. Com esse resumo em mãos, vamos retomar as aprendizagens desta Unidade.

Agora, vamos refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda no caderno às questões seguintes:

- A abertura desta Unidade apresentou o número irracional $\pi$. Agora, responda novamente à questão feita anteriormente: “Como podemos obter uma aproximação para o número $\pi$?”.
- Na abertura desta Unidade, você foi convidado a sugerir um número que, assim como o número $\pi$, também fosse um número irracional. O número que você sugeriu se mostrou como sendo um número irracional? Se sim, qual característica esse número apresenta para ser considerado um número irracional? Se não, qual número você responderia se fosse novamente convidado a responder a essa questão?
- Como podemos construir um segmento de medida $\sqrt{2}$ utilizando Geometria?
- Considerando o conjunto dos números reais, em que situação não existe a raiz de um número negativo?

# 2 PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

Vitral é uma vidraça constituída de pedaços de vidro, geralmente coloridos, combinados para formar desenhos.

Na imagem, vemos o fôlder de uma fábrica de vitrais que trabalha com peças em forma de retângulos e de quadrados.

Nesse fôlder, há o formato das peças que são utilizadas e algumas configurações oferecidas pela fábrica. Observe que a medida de algumas peças pode variar, dependendo da área do vitral.

Essa área pode ser descrita algebricamente. Esse cálculo faz parte dos estudos que faremos nesta Unidade.

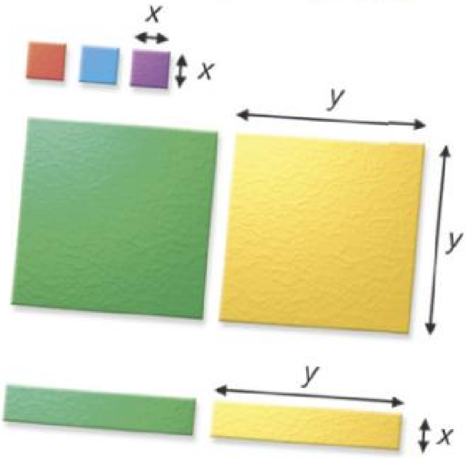
Agora, pense e responda no caderno:

- **No fôlder é mostrado um exemplo de configuração oferecida por essa fábrica com sua área indicada. O que você percebe?**
- **A cada composição é destinada uma área específica, mas cada modelo de vitral tem sua área generalizada. Qual é a área dos três vitrais que são dados como exemplo? Para que serve essa generalização?**
- **Com a ajuda de dois colegas, crie e construa o modelo de um vitral para uma janela de sua escola utilizando papéis de sua preferência; lembre-se de que o vitral deve ter as mesmas medidas da janela escolhida.**

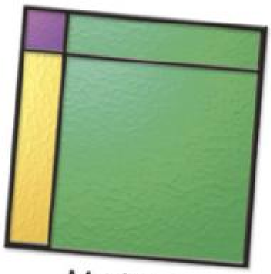
MANZI

# VITRAIS

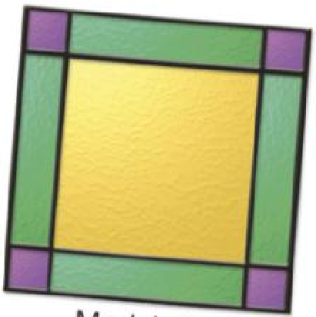
## VÁRIAS PEÇAS!



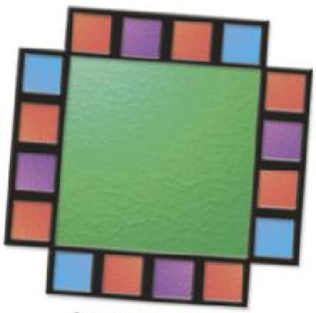

## MONTE SEUS PRÓPRIOS VITRAIS



Modelo I.

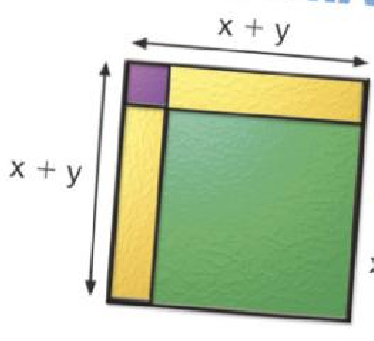


Modelo II.

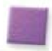


Modelo III.

## PAGUE PELA ÁREA DE VIDRO UTILIZADA NO VITRAL




Área total:
$(x + y)^2$ ou
$x^2 + 2xy + y^2$

| Peça | Quantidade | Área |
|---|---|---|
|  | 1 | $x^2$ |
|  | 2 | $2 \cdot (x \cdot y)$ |
|  | 1 | $y^2$ |

CAPÍTULO 1

# OS PRODUTOS NOTÁVEIS

No 8º ano você estudou monômios e polinômios. Vamos relembrar?

Denomina-se **monômio** ou **termo algébrico** toda **expressão algébrica** representada apenas por um número, ou apenas por uma variável, ou por uma multiplicação de números e variáveis em que a variável não esteja nem no denominador nem no radical.

Assim, são exemplos de monômios:

$3x$ | $7y$ | $x^2$ | $abc$ | $4x$

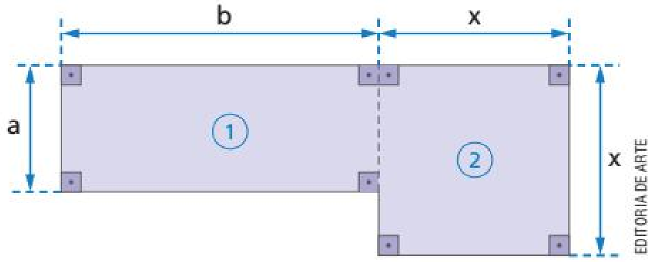
Já um **polinômio** é qualquer adição algébrica de monômios.

São exemplos de polinômios as seguintes expressões:

$ab + x^2 + 3x$ | $9z + 3y$ | $3x + 2y - x^2 + y^2$ | $y - 2x$

Observe a seguinte situação:

Qual é a expressão algébrica que representa a área da figura a seguir?




A área da figura é dada pela soma das áreas das figuras 1 e 2.

Adicionamos, então, as áreas das duas figuras:

$ab + x^2$. Assim, a área dessa figura é dada pela soma $\mathbf{ab + x^2}$

**Observações:**

- Qualquer monômio é considerado um polinômio.
- Os monômios que formam um polinômio são denominados **termos** do polinômio.

Assim:

$2xy$ é um polinômio de um só termo (monômio)

$100x + 10y + 2$ é um polinômio de três termos: $100x$, $10y$ e $2$

No cálculo algébrico, alguns produtos aparecem com muita frequência. Veja alguns desses produtos:

- $(x + y) \cdot (x + y)$ ou $(x + y)^2$ (quadrado da soma de dois termos)
- $(x - y) \cdot (x - y)$ ou $(x - y)^2$ (quadrado da diferença de dois termos)
- $(x + y) \cdot (x - y)$ (produto da soma pela diferença de dois termos)

Pela importância que têm no cálculo algébrico, esses produtos são chamados **produtos notáveis**.

# Quadrado da soma de dois termos

Vamos considerar a expressão $(x + y)^2$, que representa o **quadrado da soma de dois termos**, e desenvolvê-la algebricamente.

Aplicando a definição de potência, temos:

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) =$$

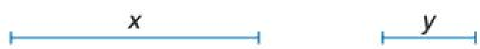
$$= x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Então, temos a igualdade:

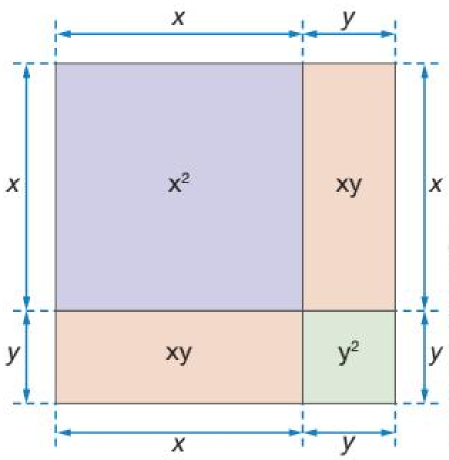
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Geometricamente, podemos encontrar a mesma igualdade resolvendo o problema a seguir.

**1** Considerando dois segmentos, um de comprimento *x* e outro de comprimento *y*, como se pode calcular a área do quadrado cujo lado mede $(x + y)$?

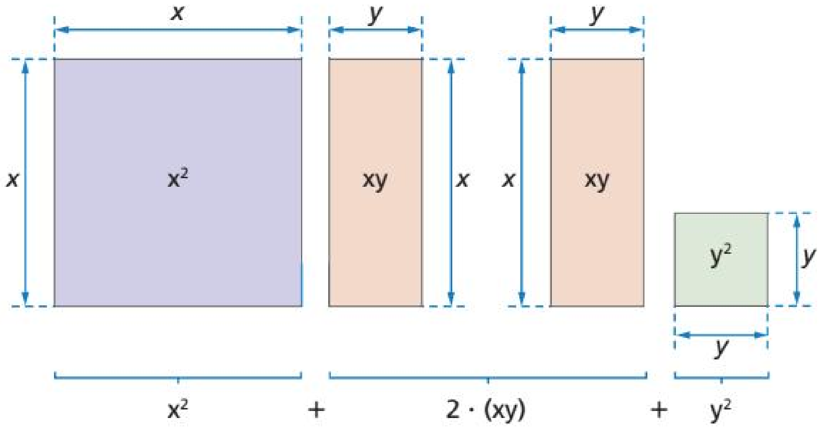



Usando esses dois segmentos, construímos a representação do quadrado:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Esse quadrado tem como medida do lado $(x + y)$, e sua área, $(x + y)^2$, pode ser expressa pela soma das áreas das figuras que o formam. Veja:



Tanto algébrica como geometricamente ficou demonstrado que:

$$\underbrace{(x+y)^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{da soma de}\\ \text{dois termos}}} = \underbrace{x^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{do 1º termo}}} + \underbrace{2xy}_{\substack{\text{duas vezes o}\\ \text{produto do 1º}\\ \text{pelo 2º termo}}} + \underbrace{y^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{do 2º termo}}}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Observe os seguintes exemplos do que acabamos de apresentar:

- $(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$
- $(a^3 + 5b)^2 = (a^3)^2 + 2 \cdot a^3 \cdot 5b + (5b)^2 = a^6 + 10a^3b + 25b^2$

# Quadrado da diferença de dois termos

Vamos considerar a expressão $(x - y)^2$, que representa o **quadrado da diferença de dois termos**, e desenvolvê-la algebricamente.

Inicialmente, de acordo com a definição de potência, temos:

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y) =$$

$$= x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Então, temos a igualdade:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Geometricamente, podemos encontrar a mesma igualdade resolvendo o problema a seguir.

**1** Considerando dois segmentos, de medidas *x* e *y*, com $x > y$, como se pode calcular a área do quadrado cujo lado mede $(x - y)$?


Usando os dois segmentos, construímos a representação do quadrado indicado no problema.

Note que a parte que não está hachurada é um quadrado de lado de medida $(x - y)$.

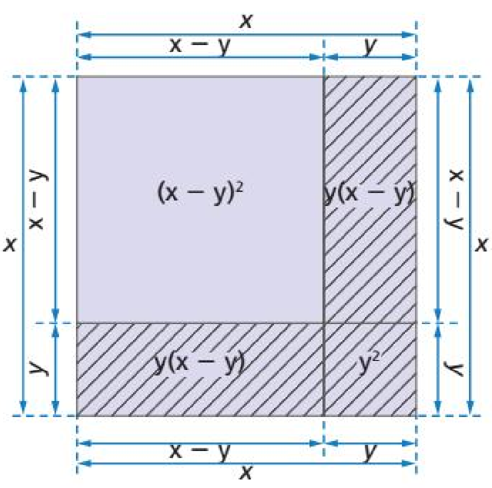
O quadrado de lado de medida $(x - y)$ tem sua área expressa por $(x - y)^2$ ou por:

$x^2 - y(x - y) - y(x - y) - y^2 =$

$= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Portanto:

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$




EDITORIA DE ARTE

Tanto algébrica como geometricamente ficou demonstrado que:

$$\underbrace{(x-y)^2}_{\substack{\text{quadrado da}\\ \text{diferença de}\\ \text{dois termos}}} = \underbrace{x^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{do 1º termo}}} - \underbrace{2xy}_{\substack{\text{duas vezes o}\\ \text{produto do 1º}\\ \text{pelo 2º termo}}} + \underbrace{y^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{do 2º termo}}}$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Observe os seguintes exemplos do que acabamos de aprender:

- $(3a - 4b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2$
- $(a^3 - xy)^2 = (a^3)^2 - 2 \cdot a^3 \cdot xy + (xy)^2 = a^6 - 2a^3xy + x^2y^2$

## Produto da soma pela diferença de dois termos

Considere a expressão $(x + y) \cdot (x - y)$, que representa **o produto da soma pela diferença de dois termos**, e vamos desenvolvê-la algebricamente:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

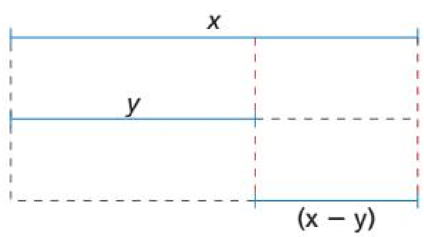
Daí, temos a seguinte igualdade:

$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

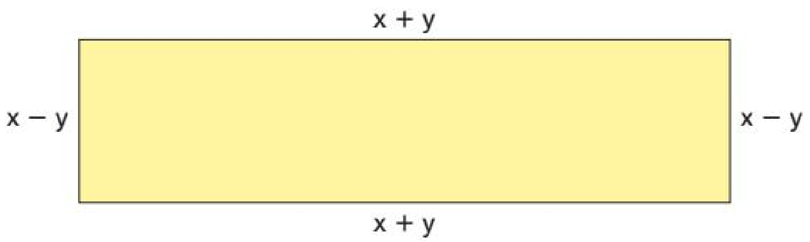
Geometricamente, obtemos essa mesma igualdade resolvendo o problema a seguir.

**1** Considerando dois segmentos de medidas *x* e *y*, com $x > y$, como se pode calcular a área do retângulo cujos lados são os segmentos de medidas $(x + y)$ e $(x - y)$?

Consideremos os segmentos de medidas *x* e *y*, com $x > y$, e um terceiro segmento de medida $(x - y)$:

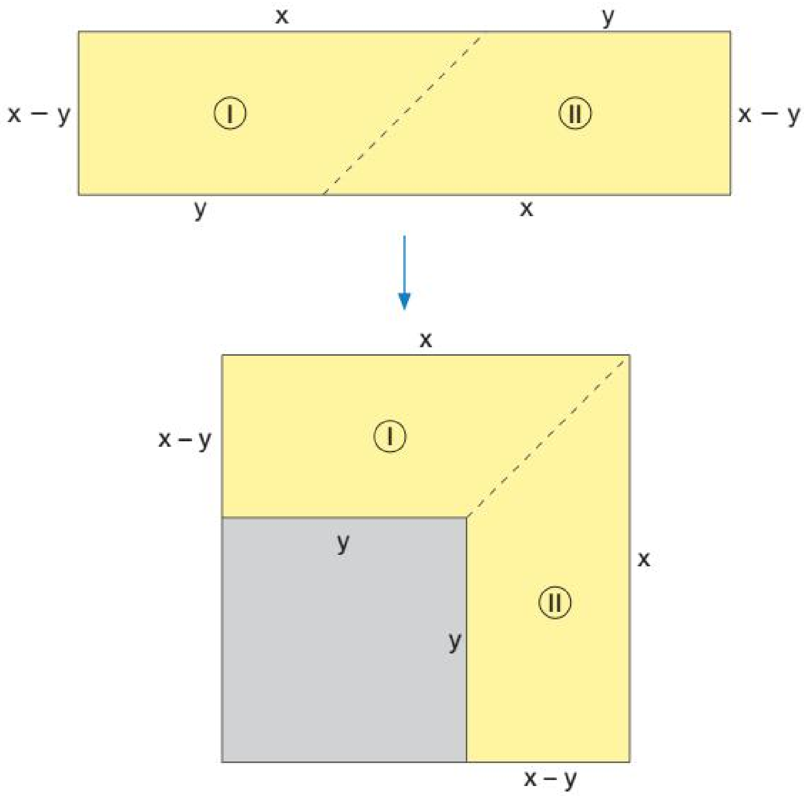



Usando os três segmentos, podemos construir o seguinte retângulo:




A figura montada é um retângulo, cujos lados medem $(x + y)$ e $(x - y)$, e sua área é expressa por $(x + y) \cdot (x - y)$.

Observe como podemos decompor o retângulo em dois quadriláteros (I e II) e compor uma nova figura.




Podemos dizer que a figura composta (colorida de amarelo) corresponde a um quadrado cujo lado mede *x*, do qual retiramos outro quadrado cujo lado mede *y*.

Assim, a área da figura colorida de amarelo é expressa por $x^2 - y^2$.

Podemos observar que a área do retângulo e a área da figura composta são iguais, o que nos permite escrever a igualdade:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$$

Tanto algébrica como geometricamente ficou demonstrado que:

$$\underbrace{(x + y)}_{\text{soma dos termos}} \cdot \underbrace{(x - y)}_{\text{diferença dos termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{quadrado do 1º termo}} - \underbrace{y^2}_{\text{quadrado do 2º termo}}$$

> O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Observe os seguintes exemplos do que acabamos de aprender:

- $(x^2 + 7y) \cdot (x^2 - 7y) = (x^2)^2 - (7y)^2 = x^4 - 49y^2$
- $(4 - xy^2) \cdot (4 + xy^2) = (4)^2 - (xy^2)^2 = 16 - x^2y^4$

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Utilizando o que aprendeu sobre produtos notáveis, escreva o polinômio correspondente a:

**a)** $(8x + 1)(8x - 1)$

**b)** $(10 + 3x)^2$

**c)** $(7a - b)^2$

**d)** $(x + 0{,}5y)^2$

**e)** $(ax + b)(ax - b)$

**f)** $(a^2 - 4y)^2$

**g)** $(1{,}4 - abc)(1{,}4 + abc)$

**h)** $(a^3 + b^3)^2$

**i)** $(x^4 + 5y^3)^2$

**j)** $\left(bc - \frac{1}{2}a^2\right)\left(bc + \frac{1}{2}a^2\right)$

**2.** Qual é o polinômio que obtemos quando multiplicamos:

**a)** $3x^2 - 2c$ por $3x^2 + 2c$?

**b)** $a^2 b^2 + 2{,}5c$ por $a^2 b^2 - 2{,}5c$?

**3.** (Saresp-SP) O polinômio $9x^2 - 25$ é equivalente a:

**a)** $(3x + 5)(3x - 5)$

**b)** $(3x + 5)(3x + 5)$

**c)** $(3x - 5)(3x - 5)$

**d)** $3x(3x - 25)$

**4.** (Saresp-SP) A expressão $x^2 - a^2$ é equivalente a:

**a)** $-2ax$

**b)** $(x - a)^2$

**c)** $(x + a)^2$

**d)** $(x - a)(x + a)$

**5.** Desenvolvendo a expressão $(3x^5 - 0{,}5)^2$, encontramos um trinômio.

**a)** Qual é esse trinômio?

**b)** Qual é o coeficiente numérico do termo em $x^5$?

**c)** Qual é o produto dos coeficientes numéricos do trinômio?

**6.** Entre as igualdades seguintes, identifique aquelas que são falsas e corrija-as, escrevendo-as corretamente.

**a)** $(b - 2c)^2 = b^2 - 4bc + 4c^2$

**b)** $(3y - a)(3y + a) = 3y^2 - a^2$

**c)** $(2c - a)^2 = 2c^2 + 4ac + a^2$

**d)** $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = x^6 - y^6$

**7.** Quando você divide um polinômio *P* por $2ax + 5$, vai encontrar o polinômio $2ax + 5$. Usando as regras dos produtos notáveis, escreva o polinômio *P*.

**8.** (Saresp-SP) Ao calcular a área de uma determinada casa, representada na figura a seguir, uma pessoa calculou a área de cada cômodo da casa, encontrando a seguinte expressão: $ab + ac + 10b + 10c$. Outra pessoa calculou a área dessa mesma casa de outra maneira, chegando também ao resultado anterior. De que forma essa pessoa pode ter representado a área dessa casa?


**a)** $(a + 10)(b + c)$

**b)** $(a + b)(10 + c)$

**c)** $(c + 10)(a + b)$

**d)** $(a + c)(b + 10)$

**9.** Considere o polinômio $x^2 + 8x$. Qual é o termo que devemos adicionar a esse binômio para obtermos $(x + 4)^2$?

**10.** Para obtermos $(a - 2b)^2$, devemos acrescentar um termo ao polinômio $a^2 - 2ab + 4b^2$. Qual é esse termo?

**11.** O produto de dois polinômios é $x^2y^2 - a^6$. Se um dos polinômios é $xy - a^3$, qual é o outro?

**12.** Sabe-se que $xy = 72$ e $x^2 + y^2 = 306$. Qual é o valor de $(x + y)^2$?

**13.** (OBM) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

**a)** 64 **c)** 120 **e)** 154

**b)** 109 **d)** 124

**14.** (Mack-SP) Se $(x - y)^2 - (x + y)^2 = -20$, então $x \cdot y$ é igual a:

**a)** $-1$ **c)** 10 **e)** $\frac{1}{5}$

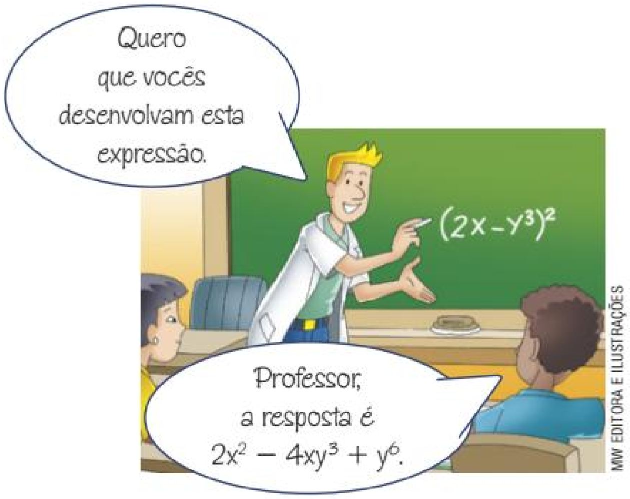
**b)** 0 **d)** 5

**15.** (Saresp-SP) A expressão algébrica que representa a situação: "o quadrado da soma de dois números, mais 5 unidades" é:

**a)** $x + y + 5^2$ **c)** $(x + y)^2 + 5$

**b)** $(x + y + 5)^2$ **d)** $x^2 + y + 5^2$

**16.** Observe:




A resposta do aluno está correta? Se não estiver correta, dê a resposta certa.

**17.** Escreva na forma reduzida cada um dos polinômios:

**a)** $(x + 1)^2 - x + (x - 1)^2 - 2 \cdot (x^2 - 1)$

**b)** $(2x + y)^2 - 6xy - (x - y)^2$

Junte-se a um colega e resolvam o desafio a seguir.

**DESAFIO**

**18.** Qual é o polinômio que representa a diferença $(x - y + 2)^2 - (x - y - 2)^2$?

## FÓRUM

Quando se pretende comprar um produto, principalmente de alto valor, é muito importante fazer uma pesquisa de preços, pois no mercado são consideráveis as diferenças de preço para o mesmo item. Entretanto, em pequenas compras de supermercado, por exemplo, também é possível economizar. O ideal é preparar uma lista dos gêneros necessários, ficar atento aos preços e fazer uma pesquisa. Isso também vale para as compras *on-line*, situação em que, além de pesquisar em vários *sites*, é importante considerar o preço do frete.

No caso de compras em lojas físicas, o consumidor deve ficar atento e verificar se o preço anunciado na vitrina corresponde ao valor afixado no produto. Nos supermercados, é possível que o preço afixado na prateleira para um produto seja diferente do preço cadastrado ou anunciado. Quando isso acontece, o consumidor tem o direito de pagar o menor valor, conforme estabelece o Código de Proteção e Defesa do Consumidor.

- Na sua opinião, qual é a importância de fazer uma pesquisa de preços antes de realizar uma compra? Discuta com seus colegas.

# Cubo da soma de dois termos

Vamos considerar o produto notável $(x + y)^3$. Para desenvolvê-lo, usaremos as regras já aprendidas. Observe:

$(x + y)^3 = (x + y) \cdot (x + y)^2 =$ ⟶ propriedade das potências de mesma base

$= (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) =$ ⟶ pela regra do quadrado da soma

$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 =$ ⟶ pela multiplicação de polinômios

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ ⟶ polinômio reduzido

Então:

$$\underbrace{(x + y)^3}_{\text{cubo da soma de dois termos}} = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

# Cubo da diferença de dois termos

Consideremos o produto notável $(x - y)^3$. Observe:

$(x - y)^3 = (x - y) \cdot (x - y)^2 =$ ⟶ propriedade das potências de mesma base

$= (x - y) \cdot (x^2 - 2xy + y^2) =$ ⟶ pela regra do quadrado da diferença

$= x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 =$ ⟶ pela multiplicação de polinômios

$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ⟶ polinômio reduzido

Então:

$$\underbrace{(x - y)^3}_{\text{cubo da diferença de dois termos}} = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Desenvolva as seguintes expressões:

**a)** $(a + b)^3$

**b)** $(b - c)^3$

**c)** $(2a + 1)^3$

**d)** $(1 - 2a)^3$

**e)** $(2x + y)^3$

**f)** $(3y - 1)^3$

**2.** Qual é a forma mais simples de escrever as expressões?

**a)** $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) + 4ab(a - b)$

**b)** $(2x - y)^3 - (2x + y)^3 + 2xy(2x + y)$

**c)** $(1 - a)^3 + 2a(-2 + a^2) + (1 - a^3)$

CAPÍTULO 2

# FATORANDO POLINÔMIOS

Veja como podemos escrever o número 90 utilizando a multiplicação:

90

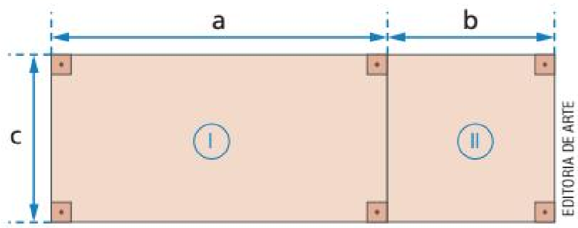
$2 \cdot 45$ | $3 \cdot 30$ | $5 \cdot 18$ | $6 \cdot 15$ | $9 \cdot 10$ | $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Quando escrevemos o número 90 nas formas apresentadas anteriormente, transformamos esse número em uma multiplicação de fatores.

Em qualquer um dos casos, fizemos a **fatoração** do número 90.

> Fatorar um número significa escrevê-lo como uma **multiplicação de dois ou mais fatores**.

Considerando esses conhecimentos, vamos representar a área da figura a seguir:




**1ª maneira**: Área da figura I mais área da figura II, ou seja, $ac + bc$.

**2ª maneira**: Fazendo $c \cdot (a + b)$.

Daí, podemos escrever:

$$\underbrace{ac + bc}_{\text{polinômio}} = \underbrace{c \cdot (a + b)}_{\text{multiplicação de polinômios}}$$

Quando escrevemos o polinômio $ac + bc$ na forma $c \cdot (a + b)$, estamos transformando o polinômio inicial em uma multiplicação de polinômios.

> Fatorar um polinômio, quando for possível, significa escrever esse polinômio como uma **multiplicação de dois ou mais polinômios**.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Usando uma multiplicação de dois fatores, escreva cada um dos números de três maneiras diferentes.

**a)** 54 **b)** 120

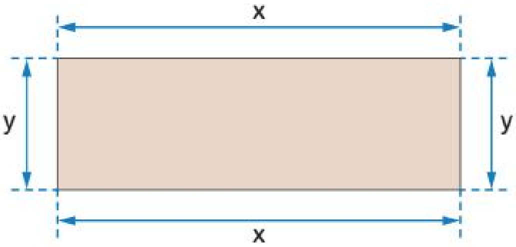
**2.** Quando você efetua a multiplicação $(a + b) \cdot (a - b)$, você encontra o polinômio $a^2 - b^2$. Escreva na forma de multiplicação os polinômios a seguir.

**a)** $x^2 - y^2$ **b)** $b^2 - c^2$

# Fatoração pela colocação de um fator comum em evidência

Considere as seguintes situações:

**1** Vamos calcular o perímetro da figura do retângulo, cujas dimensões medem *x* e *y*.




O perímetro desse retângulo pode ser indicado de duas maneiras: $2x + 2y$ ou $2 \cdot (x + y)$

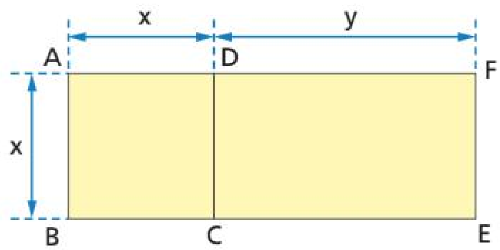
Então, podemos escrever:

$$\underbrace{2x + 2y}_{\textbf{polinômio}} = \underbrace{2 \cdot (x + y)}_{\textbf{forma fatorada do polinômio}}$$

Notamos que:

- 2 é um fator comum a todos os termos do polinômio e foi colocado em evidência;
- o outro fator $(x + y)$ é o mesmo que $(2x : 2) + (2y : 2)$ ou $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}}$ → $x$ + $y$

**2** A figura nos mostra um quadrado ABCD, um retângulo CEFD e um retângulo ABEF. Vamos calcular a área total da figura, ou seja, a área do retângulo ABEF. De acordo com a figura, podemos escrever:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\underbrace{\text{área do quadrado ABCD}}_{x^2} + \underbrace{\text{área do retângulo CEFD}}_{xy} = \underbrace{\text{área do retângulo ABEF}}_{x \cdot (x + y)}$$

ou seja:

$$\underbrace{x^2 + xy}_{\textbf{polinômio}} = \underbrace{x \cdot (x + y)}_{\textbf{forma fatorada do polinômio}}$$

Notamos que:

- *x* é um fator que aparece em todos os termos do polinômio e foi colocado, como fator comum, em **evidência**;
- o outro fator $(x + y)$ é dado por $(x^2 : x) + (xy : x)$ ou $\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}y}{\cancel{x}}$ → $x$ + $y$

> Quando todos os termos de um polinômio têm um fator comum, podemos colocá-lo em evidência. A forma fatorada é o produto do fator comum pelo polinômio que se obtém dividindo-se cada termo do polinômio dado pelo fator comum.

Veja, agora, estas outras situações:

**1** Fatorar o polinômio $6ax + 8ay$. O fator comum é $2a$. Daí temos:

$$6ax + 8ay = 2a \cdot (\underbrace{3x}_{(6ax\,:\,2a)} + \underbrace{4y}_{(8ay\,:\,2a)})$$

A forma fatorada do polinômio $6ax + 8ay$ é $\mathbf{2a(3x + 4y)}$.

**2** Vamos escrever na forma de um produto o polinômio $a^4 - a^3 + a^2$.
O fator comum é $a^2$. Daí temos:

$$a^4 - a^3 + a^2 = a^2 \cdot (\underbrace{a^2}_{(a^4\,:\,a^2)} - \underbrace{a}_{(a^3\,:\,a^2)} + \underbrace{1}_{(a^2\,:\,a^2)})$$

O polinômio $a^4 - a^3 + a^2$ na forma de um produto é $\mathbf{a^2\,(a^2 - a + 1)}$.

**3** Qual é a forma fatorada de $8a^4b^5 - 20a^3b^2 - 16a^2b^4$?
O fator comum é $4a^2b^2$. Daí temos:

$$8a^4b^5 - 20a^3b^2 - 16a^2b^4 = 4a^2b^2 \cdot (\underbrace{2a^2b^3}_{(8a^4b^5\,:\,4a^2b^2)} - \underbrace{5a}_{(20a^3b^2\,:\,4a^2b^2)} - \underbrace{4b^2}_{(16a^2b^4\,:\,4a^2b^2)})$$

A forma fatorada do polinômio $8a^4b^5 - 20a^3b^2 - 16a^2b^4$ é $\mathbf{4a^2b^2(2a^2b^3 - 5a - 4b^2)}$.

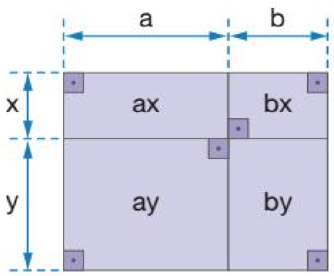
**4** Fatorar $a \cdot (a - b) + x \cdot (a - b)$.
O fator comum é $(a - b)$. Daí temos:

$$a \cdot (a - b) + x \cdot (a - b) = (a - b) \cdot (\underbrace{a}_{[a\,\cdot\,(a - b)]\,:\,(a - b)} + \underbrace{x}_{[x\,\cdot\,(a - b)]\,:\,(a - b)})$$

A forma fatorada do polinômio $a \cdot (a - b) + x \cdot (a - b)$ é $\mathbf{(a - b)(a + x)}$.

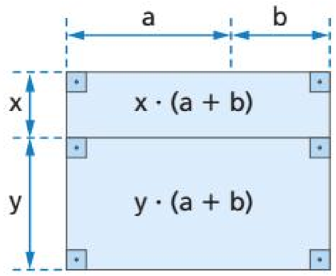
# Fatoração por agrupamento

Observe as três figuras a seguir:



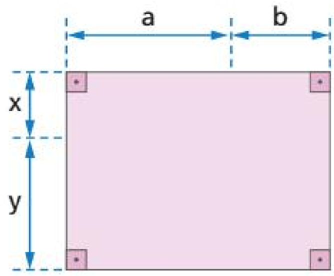

A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio:

$ax + bx + ay + by$




A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio:

$x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b)$




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A área dessa figura pode ser dada pelo produto:

$(a + b) \cdot (x + y)$

Como as três figuras têm áreas iguais, podemos escrever:

$$\underbrace{ax + bx + ay + by}_{\text{polinômio}} = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) = \underbrace{(a + b) \cdot (x + y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

Veja como podemos escrever algebricamente, na forma fatorada, o polinômio $ax + bx + ay + by$:

$\underbrace{ax + bx} + \underbrace{ay + by} =$ → **agrupamos os termos que possuem fator comum**

$= x(a + b) + y(a + b) =$ → **em cada grupo colocamos os fatores comuns em evidência**

$= (a + b)(x + y)$ → **colocamos, novamente, em evidência o fator comum**

Acompanhe outros exemplos:

**1** Qual é a forma fatorada do polinômio $mx - nx + 2m - 2n$?

$$\underbrace{mx - nx} + \underbrace{2m - 2n} = \underbrace{x(m - n)} + \underbrace{2(m - n)} = (m - n)(x + 2)$$

Então, $\mathbf{(m - n)(x + 2)}$ é a forma fatorada do polinômio $mx - nx + 2m - 2n$.

**2** Fatorar $a^3 + a^2 + a + 1$

$$\underbrace{a^3 + a^2} + \underbrace{a + 1} = \underbrace{a^2 \cdot (a + 1)} + \underbrace{1 \cdot (a + 1)} = (a + 1)(a^2 + 1)$$

Então, $\mathbf{(a + 1)(a^2 + 1)}$ é a forma fatorada de $a^3 + a^2 + a + 1$.

**3** Fatorar $3ax + 2b^2 + b^2x + 6a$.

Inicialmente, agrupamos os termos usando a propriedade comutativa.

$$\underbrace{3ax + 6a} + \underbrace{b^2x + 2b^2} = \underbrace{3a(x + 2)} + \underbrace{b^2(x + 2)} = (x + 2)(3a + b^2)$$

Então, $\mathbf{(x + 2)(3a + b^2)}$ é a forma fatorada de $3ax + 2b^2 + b^2x + 6a$.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Colocando o fator comum em evidência, fatore os seguintes polinômios:

a) $10x + 10y$

b) $y^2 + 9xy$

c) $0,5x - 1y$

d) $ab - a^3b^3$

e) $a^2x + abx$

f) $x^2y^2 - x^5y^5$

g) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{9}b$

h) $2,5ax^2 - 2,5a$

**2.** Escreva a forma fatorada de cada um dos seguintes polinômios:

a) $b^2 - ab - b$

b) $24x^5 - 8x^4 - 56x^3$

c) $a^7 + a^5 + a^3$

d) $120ax^3 - 100ax^2 + 60ax$

e) $\frac{1}{8}ab + \frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{2}ab^2$

**3.** A professora de Carlos escreveu no quadro de giz a expressão $ac + ad + bc + bd$ e fez o seguinte comentário:

"Nessa expressão, a, b, c e d representam quatro números inteiros em ordem crescente. A soma dos dois números maiores é 59 e a soma dos dois números menores é 34. Então, quem me diz qual é o valor numérico dessa expressão?"

Que resposta Carlos deve fornecer para acertar a pergunta feita por sua professora?

**4.** Qual é a forma fatorada de:

a) $a(x + y) - b(x + y)$?

b) $x(p + h) + y(p + h)$?

c) $b(a - x) - c(a - x)$?

**5.** Dado o polinômio $5ax^2 - 5ay^2$, escreva sua forma fatorada e dê seu valor numérico sabendo que $a = 20$ e $x^2 - y^2 = 25$.

**6.** Fatore o polinômio $xy^3 + 7xy^2 - 3xy$ e dê seu valor numérico sabendo que $xy = 6$ e $y^2 + 7y = 20$.

**7.** Sabe-se que $2x - y = 20$ e que $a + b + c = 100$.

Nessas condições, escreva a forma fatorada do polinômio $a(2x - y) + b(2x - y) + c(2x - y)$ e calcule seu valor numérico.

**8.** Fatore os seguintes polinômios:

a) $a^2 + ab + ax + bx$

b) $ax - x + ab - b$

c) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$

d) $bx^2 - 2by + 5x^2 - 10y$

e) $2b^2 + 2 - b^2k - k$

f) $5y^3 - 4y^2 + 10y - 8$

g) $a^{12} + a^8 - a^4 - 1$

h) $2an + n - 2am - m$

i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + xy + y$

**9.** Determine o valor numérico do polinômio $ac - bc + ad - bd$, sabendo que $c + d = 2,5$ e $a - b = -1,1$.

**10.** Fatore os polinômios:

a) $ax - bx + cx + ay - by + cy$

b) $am + bm + m - an - bn - n$

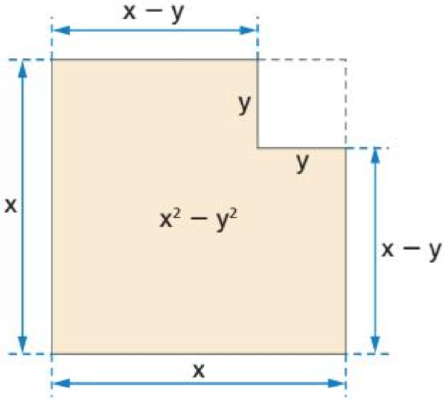
c) $a(x + y) + b(x + y) + x(a + b) + y(a + b)$

**11.** Dado o polinômio $x^2 - xz + 2xy - 2yz$, determine sua forma fatorada e o valor numérico da expressão obtida, sabendo que $x - z = 5$ e $x + 2y = 27$.

**12.** As medidas dos lados de um retângulo são expressas por *a* e *b*, e esse retângulo tem 18 unidades de perímetro. Um segundo retângulo tem 26 unidades de perímetro, e as medidas dos seus lados são expressas por *b* e *c*. Nessas condições, calcule o valor numérico da expressão $ab + b^2 + ac + bc$.

# Fatoração da diferença de dois quadrados

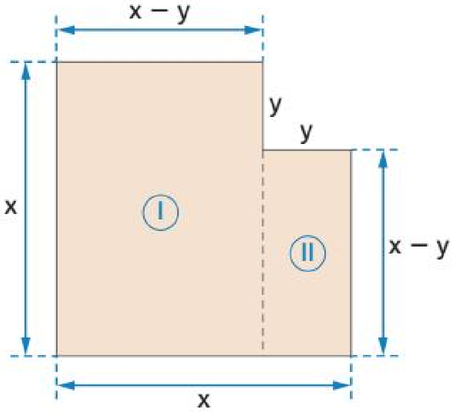
Considere a figura:




A área colorida da figura pode ser indicada pelo polinômio $x^2 - y^2$, que expressa uma **diferença de dois quadrados**.

Separando a figura em dois retângulos, conforme a Figura ①, pelo tracejado e juntando as duas partes obtidas, formamos uma nova figura. Observe:

**Figura** ①



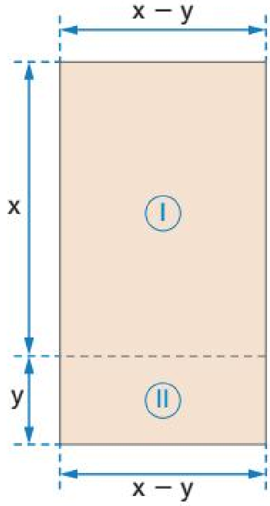




**Figura** ②

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Notando que a área da Figura ①, que é expressa por $x^2 - y^2$, e a área da Figura ②, que é expressa por $(x + y)(x - y)$, são iguais, escrevemos:

$$\underbrace{x^2 - y^2}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(x + y) \cdot (x - y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

Acompanhe estas outras situações:

**1** O polinômio $x^2 - 36$ representa uma diferença de dois quadrados. Fatorar esse polinômio.
Como $36 = 6^2$, temos: $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x + 6)(x - 6)$.
Então, $\mathbf{(x + 6)(x - 6)}$ é a forma fatorada de $x^2 - 36$.

**2** Qual é a forma fatorada do polinômio $\frac{1}{9} - x^2y^2$?

Como $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, temos: $\frac{1}{9} - x^2y^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - (xy)^2 = \left(\frac{1}{3} + xy\right)\left(\frac{1}{3} - xy\right)$

Então, $\left(\frac{1}{3} + xy\right)\left(\frac{1}{3} - xy\right)$ é a forma fatorada do polinômio $\frac{1}{9} - x^2y^2$.

**3** Escrever o polinômio $(n + 7)^2 - 1$ na sua forma fatorada. Como $1 = 1^2$, essa expressão representa uma diferença de dois quadrados:

$(n + 7)^2 - 1^2 = [(n + 7) + 1] \cdot [(n + 7) - 1] = (n + 7 + 1)(n + 7 - 1) = (n + 8)(n + 6)$

Então, $\mathbf{(n + 8)(n + 6)}$ é a forma fatorada de $(n + 7)^2 - 1$.

**4** Escrever a expressão $a^2 - (b + c)^2$ na forma de uma multiplicação.

$a^2 - (b + c)^2 = [a + (b + c)] \cdot [a - (b + c)] = (a + b + c) \cdot (a - b - c)$

Assim, a forma fatorada da expressão $a^2 - (b + c)^2$ é $\mathbf{(a + b + c)(a - b - c)}$.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Cada um dos polinômios seguintes representa uma diferença de dois quadrados. Fatore esses polinômios.

**a)** $a^2 - 64$
**b)** $100 - b^2$
**c)** $x^2 - 0,25$
**d)** $16b^2 - 9c^2$
**e)** $1 - x^2y^2$
**f)** $a^4 - c^4$
**g)** $a^6b^6 - 0,01$
**h)** $x^4 - 100$
**i)** $9 - y^6$
**j)** $81r^2 - s^4$

**2.** Qual é a forma fatorada de cada polinômio?

**a)** $\frac{1}{4} - 9x^2$
**b)** $\frac{1}{100} - a^2b^2$
**c)** $\frac{1}{25}a^4 - \frac{1}{4}y^2$
**d)** $b^2 - \frac{1}{16}c^2$

**3.** O professor de Matemática disse que $5x - y = -20$ e que $5x + y = -2$. Nessas condições, qual é o valor numérico do polinômio $25x^2 - y^2$?

**4.** Dado o polinômio $a^2b^2 - x^2$, escreva sua forma fatorada e calcule seu valor numérico para $ab + x = 21$ e $ab - x = 5$.

**5.** Escreva a forma fatorada de cada um dos seguintes polinômios considerando que representam diferenças de dois quadrados:

**a)** $(x - 4)^2 - 16$
**b)** $(y + 1)^2 - 25$
**c)** $(a + b)^2 - c^2$
**d)** $(n + 5)^2 - 36$
**e)** $(3x - 1)^2 - x^2$
**f)** $(a^3 + 3)^2 - a^6$
**g)** $x^2 - (x + y)^2$
**h)** $a^2 - (a + 1)^2$

# Fatoração do trinômio quadrado perfeito

A figura I representa um quadrado cujo lado mede $(x + y)$ unidades de comprimento e cuja área pode ser escrita de duas maneiras:

$$x^2 + 2xy + y^2 \text{ ou } (x + y)^2$$

Na figura II, a região não hachurada representa um quadrado cujo lado mede $(x - y)$ unidades de comprimento e cuja área pode ser representada de duas maneiras:

$$x^2 - 2xy + y^2 \text{ ou } (x - y)^2$$

Então, podemos escrever as seguintes igualdades:

- $\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{\textbf{polinômio}} = \underbrace{(x + y)(x + y) = (x + y)^2}_{\textbf{forma fatorada do polinômio}}$
- $\underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{\textbf{polinômio}} = \underbrace{(x - y)(x - y) = (x - y)^2}_{\textbf{forma fatorada do polinômio}}$

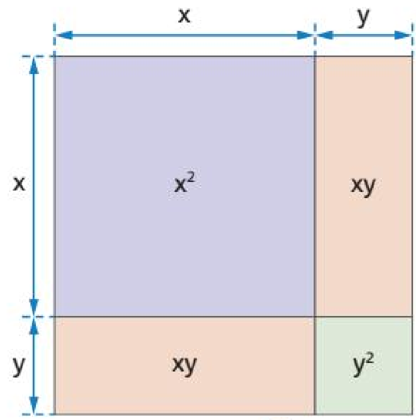


Figura I

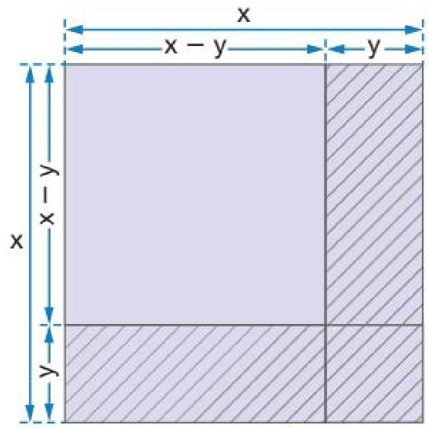


Figura II



Os polinômios $x^2 + 2xy + y^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$ são chamados trinômios quadrados perfeitos. Trinômios, porque possuem três termos; quadrados perfeitos, porque o primeiro representa o quadrado de $(x + y)$, e o segundo representa o quadrado de $(x - y)$.

Nem todos os trinômios são quadrados perfeitos. É importante reconhecer se um trinômio é ou não quadrado perfeito.

Para isso, considere as seguintes situações:

**1** Verificar se o trinômio $x^2 + 8xy + 16y^2$ é quadrado perfeito. Inicialmente, verificamos se pelo menos dois termos do trinômio são quadrados. Nesse caso, $x^2$ e $16y^2$ são quadrados, pois:

$$\underbrace{x^2}_{x^2} + 8xy + \underbrace{16y^2}_{(4y)^2}$$

Finalmente, multiplicamos por 2 o produto dessas duas raízes para verificar se o resultado será igual ao termo restante: $2 \cdot x \cdot 4y = 8xy$. Como, nesse caso, o termo restante é justamente $8xy$, dizemos que o trinômio dado é quadrado perfeito.

**2** Verificar se o trinômio $x^2 - 6x + 9$ é quadrado perfeito. $x^2$ e 9 são termos quadrados.

$$\underbrace{x^2}_{x^2} - 6x + \underbrace{9}_{3^2}$$

$2 \cdot x \cdot 3 = 6x \longrightarrow$ **6x é o termo restante do trinômio**

Logo, $x^2 - 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.

**3** Verificar se o trinômio $16x^2 - 24x + 25$ é quadrado perfeito. $16x^2$ e 25 são termos quadrados.

$$\underbrace{16x^2}_{(4x)^2} - 24x + \underbrace{25}_{5^2}$$

$2 \cdot 4x \cdot 5 = 40x \longrightarrow$ **40x não corresponde ao termo restante do trinômio.**

Logo, $16x^2 - 24x + 25$ não é um trinômio quadrado perfeito. Os seguintes trinômios são quadrados perfeitos. Vamos fatorá-los:

- Fatorar $x^2 + 8xy + 16y^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{x^2}_{x^2} + 8xy + \underbrace{16y^2}_{(4y)^2} \\ 2 \cdot x \cdot 4y = 8xy \end{array}\right] \longrightarrow x^2 + 8xy + 16y^2 = (x + 4y)^2$$

- Fatorar $a^6 - 10a^3b + 25b^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{a^6}_{(a^3)^2} - 10a^3b + \underbrace{25b^2}_{(5b)^2} \\ 2 \cdot a^3 \cdot 5b = 10a^3b \end{array}\right] \longrightarrow a^6 - 10a^3b + 25b^2 = (a^3 - 5b)^2$$

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Verifique se cada um dos seguintes trinômios representa um trinômio quadrado perfeito:

**a)** $a^2 - 10ab + 25b^2$

**b)** $x^2 - 8x + 25$

**c)** $9x^2 - 6x + 1$

**d)** $16y^2 + 24xy + 9x^2$

**2.** Se você fatorar $x^2 + 18x + 81$, qual polinômio vai obter?

**3.** O trinômio $x^2 - 0{,}4x + 0{,}04$ é quadrado perfeito. Qual é sua forma fatorada?

**4.** Sabendo que os trinômios a seguir são quadrados perfeitos, escreva a forma fatorada de cada um deles.

**a)** $4x^2 - 12xy + 9y^2$

**b)** $y^2 + 22y + 121$

**c)** $81p^2 - 18p + 1$

**d)** $4b^2 + 16bx + 16x^2$

**e)** $100p^2 - 20px + x^2$

**f)** $144x^2y^2 + 24xy + 1$

**g)** $m^2 - 12m + 36$

**h)** $16a^4 + 8a^2b + b^2$

**i)** $100 - 20bc + b^2c^2$

**j)** $x^{10} + 4x^5y^3 + 4y^6$

**5.** Para se obter $(3a + 2)^2$, qual termo deve ser adicionado ao trinômio $9a^2 + 10a + 4$?

**6.** Quando $x + y = 15$ e $x - y = -6$, qual é o valor numérico da expressão algébrica $(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)$?

**7.** Sabe-se que $2a - 3 = -11$. Qual é, então, o valor numérico do polinômio $4a^2 - 12a + 9$?

# Fatoração da soma ou da diferença de dois cubos

Observe as multiplicações:

**1** $(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3 = x^3 + y^3$

Pela propriedade simétrica das igualdades, escrevemos:

$$\underbrace{x^3 + y^3}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

**2** $(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

Pela propriedade simétrica das igualdades, escrevemos:

$$x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$$

$$\underbrace{x^3 - y^3}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$$

# Fatorando mais de uma vez

Vamos fatorar o polinômio $x^4 - 16$. Como esse polinômio representa uma diferença de quadrados, fazemos:

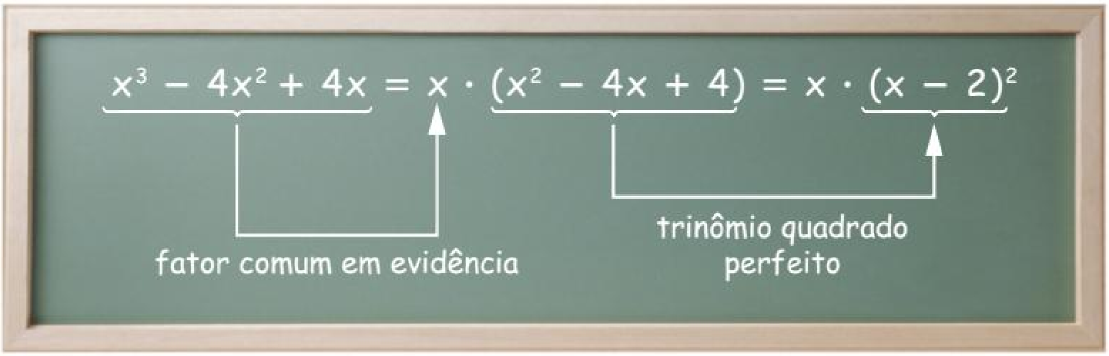
$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4)$$

Note, porém, que a fatoração não está terminada, pois o fator $(x^2 - 4)$ também é uma diferença de quadrados e, portanto, pode ser fatorado. Sendo assim, escrevemos:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$$

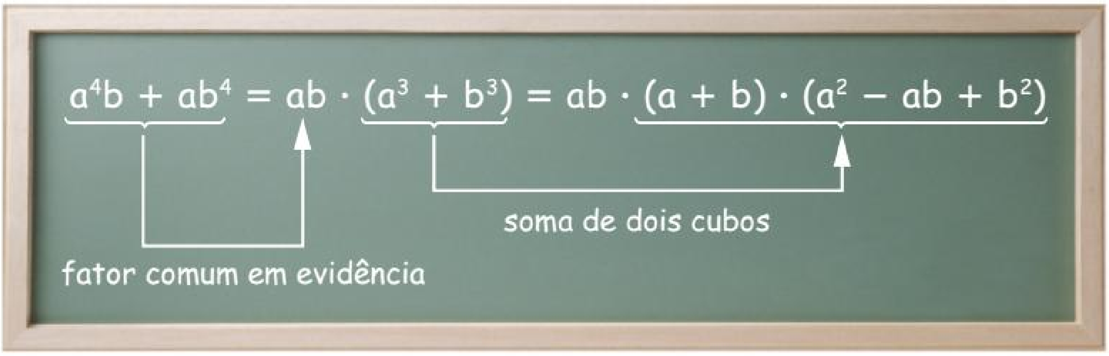
Existem polinômios cuja fatoração exige a aplicação de mais de uma técnica. Acompanhe estes exemplos:

**1** Fatorar $x^3 - 4x^2 + 4x$.




PHOTODISC/GETTY IMAGES

**2** Fatorar $a^4b + ab^4$.




PHOTODISC/GETTY IMAGES

# Usando a fatoração para resolver equações

Existe uma propriedade importante, válida para os números reais, que nos mostra que:

se $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Considerando essa propriedade e usando os casos de fatoração, podemos resolver algumas equações.

Veja as seguintes situações:

**1** Quais são as raízes da equação $x^2 - 16 = 0$?

Como $x^2 - 16$ é uma diferença de quadrados $x^2 - 4^2$, temos:

$x^2 - 16 = 0$

$(x + 4)(x - 4) = 0$ ⟶ **forma fatorada**

$$(x + 4)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 0 \quad \therefore x = -4 \\ \text{ou} \\ x - 4 = 0 \quad \therefore x = 4 \end{cases}$$

Então, as raízes da equação $x^2 - 16 = 0$ são os números $-4$ e $4$.

**SAIBA QUE**

**As raízes de uma equação são os valores que tornam a sentença verdadeira, ou seja, a solução da equação.**

**2** Quais são as raízes da equação $x^2 + 7x = 0$?

$x^2 + 7x = 0$

$x \cdot (x + 7) = 0$ ⟶ **Colocamos o fator *x* em evidência.**

$$x \cdot (x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x + 7 = 0 \quad \therefore x = -7 \end{cases}$$

Então, as raízes da equação $x^2 + 7x = 0$ são os números $0$ e $-7$.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Escreva a forma fatorada de cada um dos seguintes polinômios:

**a)** $x^3 + y^3$

**b)** $b^3 - c^3$

**c)** $a^3 - 1$

**d)** $x^3 + 8$

**e)** $27 - m^3$

**f)** $\frac{1}{125} + c^3$

**2.** Fatore os polinômios:

**a)** $a^4 - b^4$

**b)** $3x^2 - 6x + 3$

**c)** $m^2x - x$

**d)** $5a^2 + 30ab + 45b^2$

**e)** $x^3y - xy^3$

**f)** $m^8 - n^8$

**g)** $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$

**h)** $a^4 - ax^3$

**i)** $1 - \frac{1}{16}p^4$

**j)** $y^3 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{4}{9}y$

**k)** $x^3y - y$

**l)** $ax^2 - a + bx^2 - b$

**m)** $a^3 + 2a^2 + a + a^2b + 2ab + b$

**n)** $2x^7 - 2xy^6$

**o)** $a^5 + a^2b^3 - a^3b^2 - b^5$

**3.** Sabendo que $x - y = 6$, determine o valor numérico do polinômio $5x^2 - 10xy + 5y^2$.

**4.** Qual é a fatoração da expressão $ab^2 - ac^2 + b^3 - bc^2$?

**5.** Fatore o polinômio $x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$ e determine o seu valor numérico, sabendo que $xy = 10$ e $x + y = -5$.

**6.** Fatore o polinômio $ax^3 - ax + bx^3 - bx$.

**7.** Determine as raízes de cada uma das seguintes equações, sendo $U = \mathbb{R}$:

**a)** $x^2 - 9x = 0$

**b)** $x^2 - 81 = 0$

**c)** $x^2 - 64 = 0$

**d)** $x^2 + 20x = 0$

**e)** $x^2 - x = 0$

**f)** $x^2 - 0{,}25 = 0$

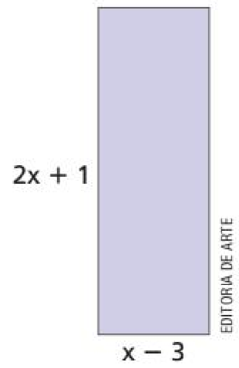
**g)** $x^2 - 1 = 0$

**h)** $x^2 + 0{,}6x = 0$

**i)** $x^2 - 0{,}01 = 0$

**j)** $x^2 - \frac{x}{4} = 0$

**8.** (Saresp-SP) Observe a figura ao lado.




A expressão algébrica mais simples que determina o perímetro desse retângulo é:

**a)** $6x - 4$

**b)** $4x - 6$

**c)** $-4x^2 + x - 3$

**d)** $x + 4$

**9.** Qual é a forma fatorada da expressão $(x + y)^2 - (2x + y)(-x + y)$?

**a)** $x(3x - y)$

**b)** $x(3x + y)$

**c)** $x(2x + y)$

**d)** $y(3x - y)$

**e)** $y(3x + y)$

**10.** Fatore os polinômios e simplifique a fração algébrica $\frac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 - 9}$. Em seguida, calcule o valor numérico da expressão obtida para $x = 0$ e para $x = 1$.

**11.** Calcule o valor numérico de $9x^2 - 18xb + 9b^2$, para $x - b = 5$.

**12.** Faça o que se pede. Calcule o valor numérico do polinômio $P = 2 \cdot (3a - 2b) \cdot (6a + 4b)$, sabendo que $9a^2 - 4b^2 = 15$.

# TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

## A cidade de Cuiabá, no Mato Grosso, é conhecida por suas altas temperaturas

A cidade de Cuiabá é conhecida por diversas características, além de suas altas temperaturas, também recebe o reconhecimento de Cidade Verde por ser muito bem arborizada, é um polo industrial, comercial e de serviços do estado onde é capital, Mato Grosso. Por estar situada em uma região de muitas paisagens naturais, Cuiabá é rica em atrações turísticas e, por ser antiga, também conta com um patrimônio histórico importante. Essa cidade possui vários lugares que valem a pena ser visitados, como: museus, prédios restaurados, mercado de peixes, obelisco, o marco do centro geodésico da América do Sul, o Horto Florestal e muito mais.

Para aprender um pouco sobre o modo de vida da população local, é possível conhecer as comunidades ribeirinhas, apreciar os artesanatos feitos por eles e alguns de seus costumes, como se banhar nos rios e baías, onde também praticam a pesca.

Informações obtidas em: **Guia do Turismo Brasil**.
Disponível em: <https://www.guiadoturismobrasil.com/cidade/MT/970/cuiaba> Acesso em: 16 nov. 2018.

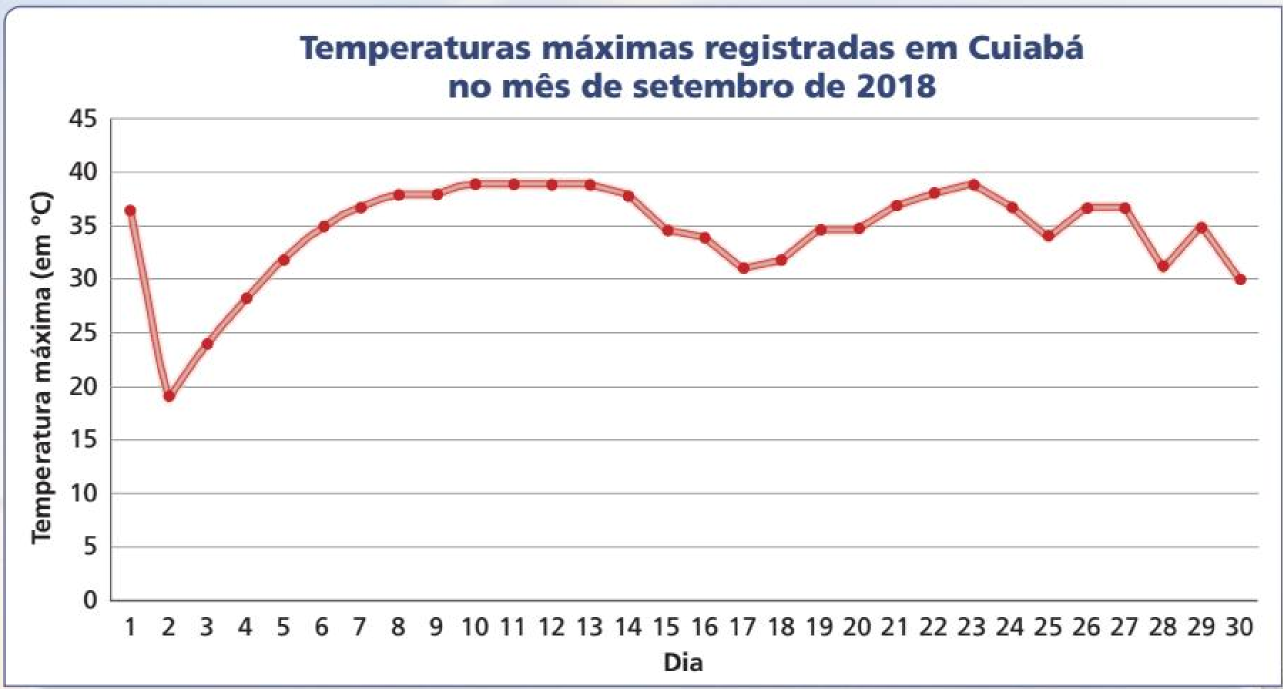
**Temperaturas máximas registradas em Cuiabá no mês de setembro de 2018**

| Dia | Temperatura máxima (em °C) |
|---|---|
| 01 | 37 |
| 02 | 19 |
| 03 | 24 |
| 04 | 28 |
| 05 | 32 |
| 06 | 35 |
| 07 | 37 |
| 08 | 38 |
| 09 | 38 |
| 10 | 39 |
| 11 | 39 |
| 12 | 39 |
| 13 | 39 |
| 14 | 38 |
| 15 | 35 |
| 16 | 34 |
| 17 | 31 |
| 18 | 32 |
| 19 | 35 |
| 20 | 35 |
| 21 | 37 |
| 22 | 38 |
| 23 | 39 |
| 24 | 37 |
| 25 | 34 |
| 26 | 37 |
| 27 | 37 |
| 28 | 31 |
| 29 | 35 |
| 30 | 30 |

Fonte: ACCUWEATHER. Disponível em: <https://www.accuweather.com/pt/br/cuiaba/44281/month/44281?monyr=9/01/2018>. Acesso em: 16 nov. 2018.

FILIPE FRAZAO

No gráfico de linhas a seguir, é possível observar a variação de temperatura máxima nos trinta dias do mês de setembro de 2018 na cidade de Cuiabá.




EDITORIA DE ARTE

Fonte: ACCUWEATHER. Disponível em: <https://www.accuweather.com/pt/br/cuiaba/44281/month/44281?monyr=9/01/2018>. Acesso em: 16 nov. 2018.

Responda às questões no caderno.

**1.** A partir das informações coletadas, determine:

**a)** a média das temperaturas máximas registradas durante o mês de setembro de 2018.

**b)** a mediana das temperaturas máximas registradas durante o mês de setembro de 2018.

**2.** Observando o gráfico e os dados coletados identifique:

**a)** a menor temperatura máxima no mês.

**b)** a maior temperatura máxima no mês.

**c)** a amplitude das temperaturas máximas registradas durante o mês de setembro de 2018.

**3.** Analisando o gráfico e as medidas obtidas nas atividades 1 e 2, o que se pode concluir em relação às temperaturas máximas do mês de setembro na cidade de Cuiabá?

Vista aérea do entardecer na cidade de Cuiabá, MT.

## RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

**1.** (Saresp-SP) Calculando-se os valores da expressão $n^2 + 3n + 1$ para *n* valendo 1, 2, 3 etc., obtém-se uma das sequências a seguir. Qual delas?

**a)** 5, 11, 17, 23, ...

**b)** 5, 11, 19, 29, ...

**c)** 5, 7, 9, 11, ...

**d)** 1, 5, 9, 13, ...

**2.** (Saresp-SP) O valor numérico da expressão $2b^2 + 8$ para *b* igual a $-3$ é:

**a)** 17

**b)** 18

**c)** 26

**d)** 34

**3.** A sequência $\frac{xy}{4}$, $\frac{x^2y}{2}$, $x^3y$, ... tem 7 termos. Qual é o último termo dessa sequência?

**a)** $16x^7y$

**b)** $8x^7y$

**c)** $16x^6y$

**d)** $16x^5y$

**e)** $32x^7y$

**4.** Dois números *a* e *b* são tais que $a = 2x + 3$ e $b = 2x - 1$. Sabendo que $a^2 - b^2 = 40$, determine o valor de *x*.

**5.** Considere a fórmula matemática $V = \frac{R}{S + 3}$. Quando $R = 28{,}8$ e $S = 1{,}5$, o valor de *V* é:

**a)** 3,2

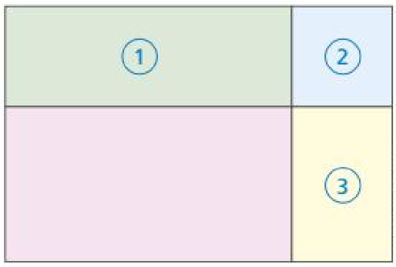
**b)** 4,2

**c)** 5,4

**d)** 5,8

**e)** 6,4

**6.** Na figura a seguir, a área do retângulo 1 é ab, a área do quadrado 2 é $b^2$, e a área do retângulo 3 é bc.




EDITORIA DE ARTE

Qual é a área do retângulo cor-de-rosa?

**a)** ac

**b)** $a^2$

**c)** bc

**d)** ab

**e)** n.d.a.

**7.** Em uma adição de polinômios, encontrou-se o resultado $3x^3 - 4x + 6$, mas verificou-se que a parcela $5x^3 - 8x^2 - 9$ havia sido incluída indevidamente. A soma dos coeficientes dos termos do polinômio, que é o resultado correto da adição, é:

**a)** +17

**b)** −17

**c)** +5

**d)** −5

**e)** +16

**8.** Utilizando o que aprendeu sobre produtos notáveis, escreva o polinômio correspondente a:

**a)** $(3x + 1)(3x - 1)$

**b)** $(10 + 2x)^2$

**c)** $(7a - 2b)^2$

**d)** $(2x + 0{,}5y)^2$

**e)** $(3x + b)(3x - b)$

**f)** $(a + 2b)^3$

**g)** $(2a - b)^3$

**h)** $(2 - 3a)^3$

**9.** Escreva a forma fatorada de cada um dos seguintes polinômios:

a) $b^2 - 2ab + b$

b) $18x^5 + 6x^4 - 42x^3$

c) $2a^5 + 2a^3 + 2a$

d) $100ax^3 - 60ax^2 + 120ax$

e) $a^2 - 49$

f) $64 - b^2$

g) $4 - a^2b^2$

**10.** Para se obter $(4a + 3)^2$, qual termo deve ser adicionado ao trinômio a seguir?

$$16a^2 + 20a + 9$$

**11.** Calcule o valor numérico do trinômio a seguir para $x - 2y = 6$.

$$7x^2 - 28xy + 28y^2$$

**12.** Sabe-se que $a^2 + b^2 = 2{,}25$ e $x + y = 0{,}8$. Qual é o valor numérico da expressão abaixo?

$$a^2x + b^2x + a^2y + b^2y$$

a) 0,18

b) 1,8

c) 18

d) 0,9

e) 2,8

**13.** A área de um retângulo é expressa pelo polinômio $x^2 - 9$, em que $x > 3$. Fatorando-o, temos as medidas de seus lados. Se o perímetro do retângulo é 32 cm, qual é a área desse retângulo?

a) 51 $cm^2$

b) 53 $cm^2$

c) 54 $cm^2$

d) 55 $cm^2$

e) 57 $cm^2$

## UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, foram abordados os conceitos de monômios, polinômios e suas operações, produtos notáveis e fatoração de polinômios. Devido à variedade e à riqueza dos conteúdos dos assuntos, sugerimos a você que:

- faça um resumo de todas as operações trabalhadas com monômios e polinômios (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação), garantindo um exemplo para cada operação;
- faça um quadro-resumo dos produtos notáveis de forma generalizada e responda como esses produtos se relacionam com a fatoração (não se esqueça de apontar exemplos);

Em seguida, registre suas dúvidas para uma conversa em sala de aula. Essa conversa pode começar em pequenos grupos e terminar de maneira coletiva, socializando possíveis dúvidas que seu grupo não conseguiu resolver. Vamos agora refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda às questões no caderno.

- Na sua opinião qual é a importância do estudo de monômios e polinômios?
- Para que usamos os produtos notáveis e a fatoração?
- Considerando o vitral que você e seus amigos criaram e construíram no início desta Unidade, elaborem um polinômio que expresse a área do vitral criado.

# 3 EQUAÇÕES DO 2º GRAU

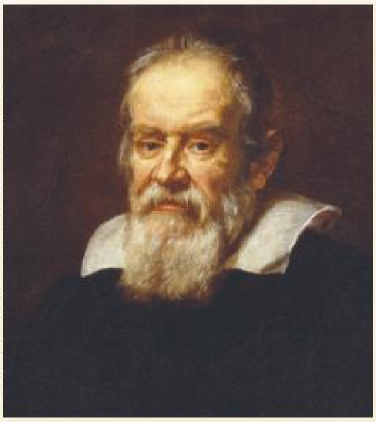
Galileu Galilei foi um dos responsáveis pelos estudos que envolvem a queda livre de corpos; ele descobriu que todo corpo em queda livre, ou seja, abandonado sem que seja aplicada uma velocidade inicial, pode ser modelado da seguinte forma: $\left(\frac{1}{2}\right)gt^2 = d$, em que *d* é a altura da queda, *g* é o valor da aceleração da gravidade no local da queda (uma boa aproximação é 9,8 m/s² na Terra) e *t* é o tempo de queda. Dessa forma, conhecendo a altura da queda, podemos fazer uma equação que determine o tempo de queda de um corpo. Por exemplo, para uma altura de 35 metros, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 9{,}8t^2 = 35$$

ALIMYAKUBOV

Agora, responda às questões no caderno.

- A equação dada anteriormente possui alguma incógnita? Se sim, qual é ela e qual é o expoente?
- Comparando a equação dada com uma equação do 1º grau, qual diferença você consegue notar entre elas?
- Segundo a equação, aproximadamente quanto tempo levará para um corpo cair de uma altura de 35 metros?



LEEMAGE/UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES

Imagem de Galileu Galilei. Quadro de 1636.

**Galileu foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano que teve grande papel na revolução científica.**
**Conta-se que para comprovar seus estudos sobres os corpos lançados de uma mesma altura, teria subido até a Torre de Pisa e lançado duas esferas de chumbo de massas diferentes.**

Torre de Pisa e Catedral de Pisa, Toscana. Itália. (Sem informação de data.)

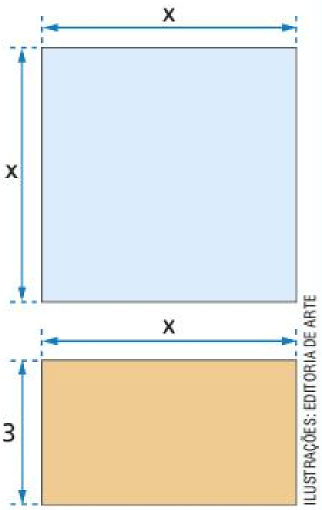
MARTIN RUEGNE/RADIUS IMAGES/GETTY IMAGES

CAPÍTULO 1

# EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

## PENSE E RESPONDA

**1.** Considere os polígonos e responda às questões no caderno.




**a)** Qual é a expressão que representa a área do quadrado?

**b)** Qual é a expressão que representa a área do retângulo laranja?

**c)** Escreva a equação que representa a seguinte afirmação: o número que expressa a área do quadrado menos o número que expressa a área do retângulo laranja é 4.

**d)** Descubra, entre os números 2; 5; 9; 6; 4; 8; 7; 10; 12, o valor do número *x* que satisfaz a equação encontrada no item c.

**e)** Como você faria a resolução dessa equação para encontrar tal número? Troque ideias com um colega.

Textos babilônicos, escritos há cerca de 4000 anos, já faziam referência a problemas que hoje resolvemos usando equações do 2º grau.

Um dos problemas mais comuns nos escritos babilônicos tratava da determinação de dois números, quando conhecidos a soma e o produto deles. A resolução desses problemas era estritamente geométrica: considerava-se o produto de dois números como a área, e a soma deles, como o semiperímetro de um retângulo. As medidas dos lados do retângulo correspondiam aos números dados, que eram sempre naturais.

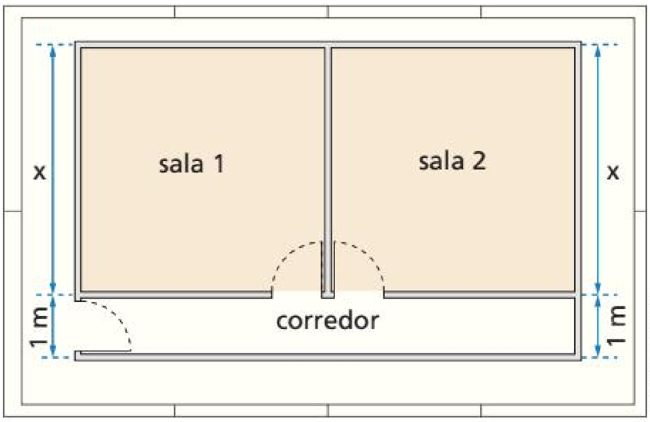
Esse tratamento geométrico era longo e cansativo, o que levou os gregos – e posteriormente os árabes – a buscar um procedimento mais simples para resolver tais problemas.

No século IX, al-Khwarizmi, matemático árabe, desenvolveu um processo para a resolução desses problemas, que deu início à chamada Álgebra Geométrica.

No século XII, com base nos estudos feitos por al-Khwarizmi, o matemático hindu Bhaskara (1114-1185) apresentou um processo puramente algébrico, que permitia resolver qualquer equação do 2º grau. Partindo desse processo, e com o uso da Álgebra Simbólica, os matemáticos puderam chegar a uma fórmula, usada até hoje, que ficou conhecida como **fórmula resolutiva** para equações do 2º grau.

# Conhecendo a equação do 2º grau com uma incógnita

Observe a planta parcial de um escritório.




EDITORIA DE ARTE

As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, juntos, 40 m² de área. Cada sala tem *x* metros de lado, e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida *x* do lado de cada sala quadrada? De acordo com a figura e os dados do problema, podemos concluir que:

- a área de cada sala é $\mathbf{x^2}$.
- a área do corredor é dada por $\mathbf{1 \cdot 2x}$ ou $\mathbf{2x}$.
- a equação que representa o problema é: $\underbrace{2x^2}_{\text{área das duas salas}} + \underbrace{2x}_{\text{área do corredor}} = 40$

Obtivemos uma equação que não é do 1º grau (que você já sabe resolver), pois existe um termo em que a incógnita *x* se apresenta com expoente 2.

> Denomina-se **equação do 2º grau na incógnita** x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$.

Assim:

- $2x^2 - 2x - 40 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita *x*, em que $a = 2$, $b = -2$ e $c = -40$.
- $x^2 - 25 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita *x*, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$.
- $6x^2 - 9x = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita *x*, em que $a = 6$, $b = -9$ e $c = 0$.

Nas equações do 2º grau com uma incógnita, os números reais *a*, *b* e *c* são chamados **coeficientes** da equação. Assim, se a equação for na incógnita *x*:

- *a* será sempre o coeficiente do termo em $x^2$;
- *b* será sempre o coeficiente do termo em *x*;
- *c* será o coeficiente sem incógnita ou o **termo independente** de *x*.

# Equação completa e equação incompleta

Pela definição, devemos ter sempre $a \neq 0$. Entretanto, podemos ter $b = 0$ ou $c = 0$. Assim:

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **completa**.

Exemplos:

- $5x^2 - 8x + 3 = 0$ é uma equação completa ($a = 5$, $b = -8$ e $c = 3$).
- $y^2 + 12y + 20 = 0$ é uma equação completa ($a = 1$, $b = 12$ e $c = 20$).

Quando $b = 0$ ou $c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta**.

Exemplos:

- $x^2 - 81 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 1$, $b = 0$ e $c = -81$).
- $10t^2 + 2t = 0$ é uma equação incompleta ($a = 10$, $b = 2$ e $c = 0$).
- $5y^2 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 5$, $b = 0$ e $c = 0$).

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Escreva as equações que são do 2º grau com uma incógnita:

**a)** $3x^2 - 5x + 1 = 0$
**b)** $10x^4 - 3x^2 + 1 = 0$
**c)** $2x - 3 = 0$
**d)** $-x^2 - 3x + 2 = 0$
**e)** $4x^2 - x = 0$
**f)** $9x^2 - 1 = 0$
**g)** $2x^4 + 5 = 0$
**h)** $0x^2 - 5x + 6 = 0$

**2.** Identifique como completa ou incompleta cada equação do 2º grau:

**a)** $x^2 - 7x + 10 = 0$
**b)** $-2x^2 + 3x - 1 = 0$
**c)** $-4x^2 + 6x = 0$
**d)** $x^2 - x - 12 = 0$
**e)** $9x^2 - 4 = 0$
**f)** $7x^2 + 14x = 0$

**3.** Todas as equações seguintes são do 2º grau e estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Identifique os coeficientes de cada equação.

**a)** $10x^2 + 3x - 1 = 0$
**b)** $x^2 + 2x - 8 = 0$
**c)** $y^2 - 3y - 4 = 0$
**d)** $7p^2 + 10p + 3 = 0$
**e)** $-4x^2 + 6x = 0$
**f)** $r^2 - 16 = 0$
**g)** $-6x^2 + x + 1 = 0$
**h)** $5m^2 - 10m = 0$

**4.** Escreva a equação $ax^2 + bx + c = 0$, quando:

**a)** $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$
**b)** $a = 4$, $b = -6$, $c = 2$
**c)** $a = 4$, $b = 0$, $c = -25$
**d)** $a = -21$, $b = 7$, $c = 0$

# Forma reduzida da equação do 2º grau com uma incógnita

Observe as seguintes equações do 2º grau com uma incógnita:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $y^2 - 25 = 0$
- $-3t^2 + 4t - 1 = 0$
- $-2x^2 + 8x = 0$

Essas equações estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que é denominada **forma reduzida de uma equação do 2º grau com uma incógnita**.

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, como, por exemplo:

- $3x^2 - 6x = x - 3$
- $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{x-4}$ (com $x \neq 0$ e $x \neq 4$)

Por meio de transformações, nas quais aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade, tais equações podem passar a ser expressas nessa forma. Acompanhe as situações a seguir.

**1** Escrever a equação $2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$ na forma reduzida.

$2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$ ⟶ equação dada

$2x^2 - 7x + 4 - 1 + x^2 = 0$ ⟶ aplicamos o princípio aditivo

$3x^2 - 7x + 3 = 0$ ⟶ forma reduzida da equação dada

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Observe a frase:

> O quadrado de um número aumentado do triplo desse número é igual ao próprio número mais 35.

Agora, escreva na forma reduzida a equação do 2º grau que se pode formar com os dados da frase anterior.

**2.** Escreva na forma $ax^2 + bx + c = 0$ as seguintes equações do 2º grau:

**a)** $x^2 - 7 = x + 5$

**b)** $x^2 + 11x = 16x - 6$

**c)** $(x + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$

**d)** $(x - 10)^2 + x(x + 17) = 104$

**e)** $x^2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}x^2$

**f)** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{x}{2}$

**g)** $x + 6 = \dfrac{4x}{x - 2}$ $(x \neq 2)$

**h)** $\dfrac{2x}{x - 3} = \dfrac{x + 1}{x + 3}$ $(x \neq -3, x \neq 3)$

**i)** $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{x - 3x^2}{x^2 - 1}$
$(x \neq 1, x \neq -1)$

**3.** A medida do lado de um quadrado é expressa por $(3x - 1)$ cm, e a área desse quadrado é 64 $cm^2$. Qual é a equação do 2º grau, escrita na forma reduzida, que se pode obter com os dados desse problema?

CAPÍTULO 2

# RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

## Equações incompletas

Você já sabe que resolver uma equação significa determinar os possíveis valores que satisfazem a equação (o conjunto solução) em um conjunto universo dado.

Na resolução das equações incompletas do 2º grau, usaremos a fatoração e estas duas propriedades importantes dos números reais:

- Sendo $x$ e $y$ dois números reais quaisquer e $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.
- Sendo $x$ e $y$ dois números reais quaisquer e $x^2 = y$, então $x = +\sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

### Resolvendo equações da forma $ax^2 + bx = 0$

Acompanhe a situação a seguir:

Um número real é tal que seu quadrado é igual ao seu triplo. Qual é esse número? Representando por $x$ o número procurado, podemos escrever a equação:

$x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0$ ⟶ **forma reduzida**

$x(x - 3) = 0$ ⟶ **colocamos $x$ em evidência**

Pela propriedade dos números reais, temos:

$x = 0$ ⟶ **uma raiz da equação**

ou

$x - 3 = 0$

$x = 3$ ⟶ **outra raiz da equação**

O número procurado é 0 ou 3.

### Resolvendo equações da forma $ax^2 + c = 0$

Acompanhe as situações a seguir.

A medida da área de uma praça quadrada é 144 m². Quanto mede o lado dessa praça?

ILUSTRA CARTOON

Indicando por *x* a medida do lado dessa praça, podemos escrever a equação:

$$x^2 = 144$$
$$x = \pm\sqrt{144}$$
$$x = \pm 12$$

**SAIBA QUE**

Utilizamos a notação $x = \pm\sqrt{a}$ para representar $x = +\sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Como a medida do lado não pode ser um número negativo, a solução $x = -12$ não serve para o problema. Logo, a medida do lado da praça é 12 m.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau, no conjunto $\mathbb{R}$:

**a)** $x^2 - 15x = 0$

**b)** $x^2 - 81 = 0$

**c)** $x^2 - 121 = 0$

**d)** $3x^2 - 5x = 0$

**e)** $x^2 - x = 0$

**f)** $9x^2 - 16 = 0$

**g)** $x^2 + 25 = 0$

**h)** $11x^2 - x = 0$

**i)** $49x^2 = 36$

**j)** $3x^2 - 27x = 0$

**k)** $x^2 - 14 = 0$

**l)** $-25x^2 - 15x = 0$

**2.** Qual é o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$?

**a)** $x^2 + 3x(x - 12) = 0$

**b)** $(x - 5)^2 = 25 - 9x$

**c)** $(x - 4)^2 + 5x(x - 1) = 16$

**3.** Calcule o conjunto solução de cada equação:

**a)** $\frac{11x^2}{10} - \frac{3x}{5} = \frac{x}{2}$, $U = \mathbb{R}$

**b)** $\frac{3}{x - 5} + \frac{1}{x + 5} = \frac{10 - x^2}{x^2 - 25}$, $U = \mathbb{R} - \{-5, 5\}$

**4.** Determine o número real positivo *x* para que se tenha $\frac{x^2 - x}{2} = x - \frac{x - x^2}{3}$.

**5.** Sendo *x* e *y* reais, considere a equação $x^2y = 90$ e determine:

**a)** o valor de *y* quando *x* vale 50% de 8.

**b)** os valores de *x* quando $y = 10$.

**6.** Leia as afirmações:

O quadrado de um número real positivo *x* é igual a 81.

O quíntuplo de um número real positivo *y* é igual ao seu quadrado.

Qual é o valor da expressão $x + y$?

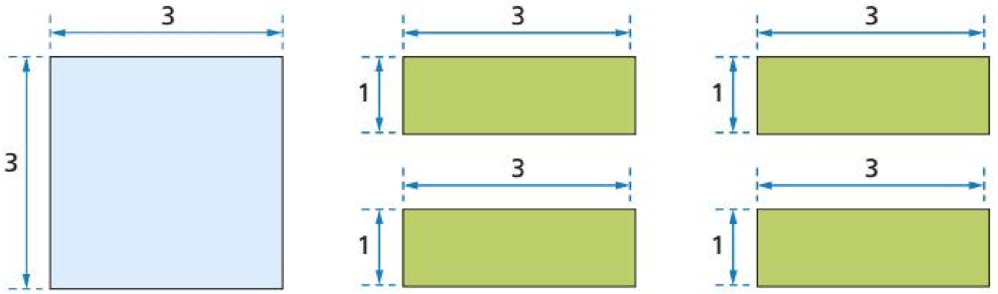
**7.** Em uma praça há um canteiro circular cuja área é 706,5 m². Quanto mede o diâmetro desse canteiro? Considere $\pi = 3,14$.

**8.** Em um triângulo de 24 cm² de área, a medida da base é o triplo da medida da altura. Determine as medidas da altura e da base deste triângulo.

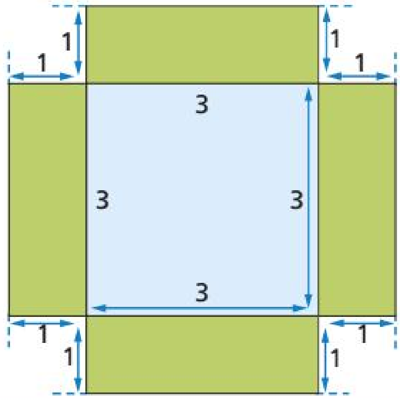
# Equações completas

## PENSE E RESPONDA

**1.** Mariana recortou, em cartolina, um quadrado e quatro retângulos como estes a seguir (as medidas são dadas em centímetros).




Usando o quadrado e os quatro retângulos, Mariana formou a figura ao lado.




Agora, partindo dessa figura, Mariana quer formar um novo quadrado. Para isso, terá de acrescentar quadradinhos à figura.

Responda no caderno:

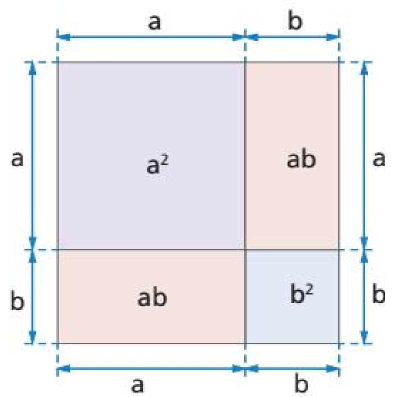
**a)** De quantos quadradinhos ela vai precisar?

**b)** Qual deve ser a área de cada um desses quadradinhos?

**c)** Qual será a área do novo quadrado?

# O processo de completar quadrados

Com base na interpretação geométrica dada pelos gregos à expressão $(a + b)^2$, o matemático al-Khwarizmi estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita. Inicialmente, vamos observar a figura que é a representação geométrica da expressão $(a + b)^2$:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

ALBERTO LLINARES

Matemático e astrônomo árabe, al-Khwarizmi viveu entre 780 e 850. Ele escreveu um tratado de Álgebra e um livro sobre os numerais hindus. Essas obras exerceram enorme influência na Europa do século XII.

Pela figura, vemos que: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

A interpretação geométrica dessa expressão algébrica é:

$$a^2 + 2ab + b^2$$

**área do quadrado de lado *b***

**área de um dos retângulos de lados *a* e *b***

**área do quadrado de lado *a***

Utilizando essa interpretação, vamos acompanhar os exemplos a seguir, que mostram como al-Khwarizmi desenvolveu seus estudos.

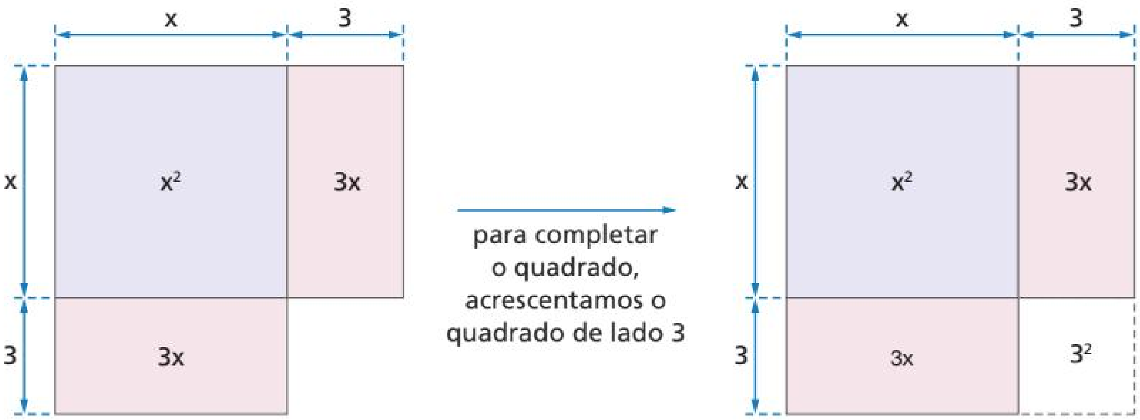
**1** Fazer uma interpretação geométrica da expressão $x^2 + 6x$ e completar um quadrado.

$$x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$$

**área de um retângulo cujos lados medem 3 e *x***

**área de um quadrado cujo lado mede *x***

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pela figura, notamos que, para completar um quadrado, devemos acrescentar o quadrado de lado 3, ou seja, de área $3^2$. Assim, se adicionarmos $3^2$ à expressão $x^2 + 6x$, obteremos $x^2 + 6x + 3^2$, que é um trinômio quadrado perfeito. Daí, podemos escrever:

$$\underbrace{x^2 + 6x + 3^2}_{\substack{\text{expressão algébrica} \\ \text{correspondente à} \\ \text{área do quadrado} \\ \text{formado}}} = \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\substack{\text{trinômio} \\ \text{quadrado} \\ \text{perfeito}}} = \underbrace{(x + 3)^2}_{\substack{\text{forma fatorada} \\ \text{do trinômio}}}$$

Note que $x^2 + 6x \neq x^2 + 6x + 9$, pois representam áreas diferentes.

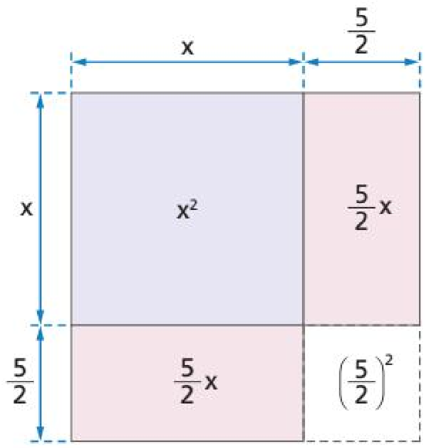
**2** Fazer uma interpretação geométrica da expressão $x^2 + 5x$ e completar um quadrado.

$$x^2 + 5x = x^2 + 2\left(\frac{5}{2}x\right)$$

**área de um retângulo cujos lados medem $\frac{5}{2}$ e *x***

**área de um quadrado cujo lado mede *x***

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada:




Pela figura, notamos que, para completar um quadrado, devemos acrescentar o quadrado de lado $\frac{5}{2}$ ou seja, um quadrado de área $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Assim, se adicionarmos $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ à expressão $x^2 + 5x$, teremos:

$$\underbrace{x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{\substack{\text{expressão algébrica} \\ \text{correspondente à área do} \\ \text{quadrado formado}}} = \underbrace{x^2 + 5x + \frac{25}{4}}_{\substack{\text{trinômio quadrado} \\ \text{perfeito}}} = \underbrace{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}_{\substack{\text{forma fatorada} \\ \text{do trinômio}}}$$

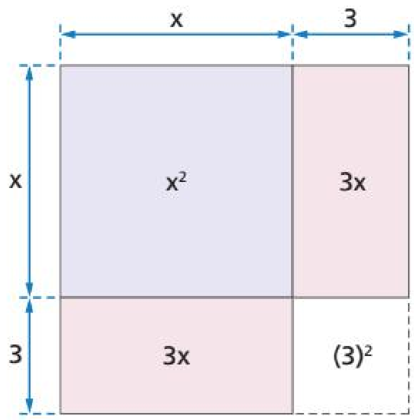
# O processo geométrico de al-Khwarizmi

Aplicando o processo de completar quadrados, vamos resolver as seguintes equações do 2º grau com uma incógnita no conjunto dos números reais.

**1** Resolver a equação $\mathbf{x^2 + 6x + 8 = 0}$.

Da expressão $x^2 + 6x$, podemos interpretar:

$$x^2 + 6x = \underbrace{x^2}_{\text{área de um quadrado cujo lado mede } x} + 2\underbrace{(3x)}_{\text{área de um retângulo cujos lados medem 3 e } x}$$




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pela figura, observamos que é necessário acrescentar o número $(3)^2$, ou seja, 9, à expressão $x^2 + 6x$, para obter um quadrado.

Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 6x$, voltamos à equação que queremos resolver:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x^2 + 6x = -8 \longrightarrow \textbf{princípio aditivo}$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\textbf{quadrado perfeito}} = -8 + 9 \longrightarrow \textbf{princípio de equivalência das equações}$$

Note que, ao acrescentarmos 9 à expressão $x^2 + 6x$ do 1º membro da equação, acrescentamos 9 também ao 2º membro para obter uma equação equivalente à anterior.

Fatorando o trinômio quadrado perfeito obtido no 1º membro, temos a equação:

$$(x + 3)^2 = 1$$

Daí, temos:

| | | |
|---|---|---|
| $(x + 3) = +\sqrt{1}$ | ou | $(x + 3) = -\sqrt{1}$ |
| $x + 3 = 1$ | | $x + 3 = -1$ |
| $x = 1 - 3$ | | $x = -1 - 3$ |
| $x = -2$ | | $x = -4$ |

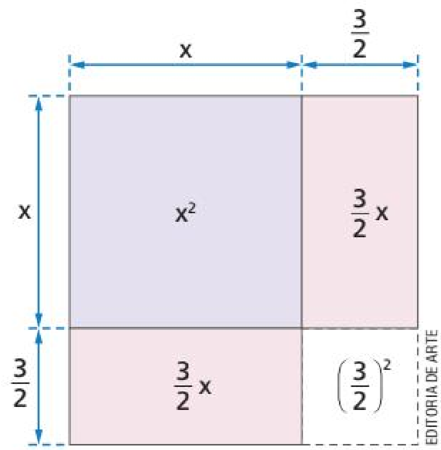
Logo, os números reais $-4$ e $-2$ são as raízes da equação dada.

**2** Resolver a equação $\mathbf{x^2 + 3x - 4 = 0}$.

Considerando a expressão $x^2 + 3x$, podemos interpretar:

$$x^2 + 3x = \underbrace{x^2}_{\text{área de um quadrado cujo lado mede } x} + 2\underbrace{\left(\frac{3}{2}x\right)}_{\text{área de um retângulo cujos lados medem } \frac{3}{2} \text{ e } x}$$

Pela figura, observamos que é necessário acrescentar o número $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, ou seja, $\frac{9}{4}$ à expressão $x^2 + 3x$ para obter um quadrado.




Depois de descobrir geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 3x$, voltamos à equação que queremos resolver:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x^2 + 3x = 4$$

$$\underbrace{x^2 + 3x + \frac{9}{4}}_{\textbf{quadrado perfeito}} = 4 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

Daí, temos:

$$x + \frac{3}{2} = +\sqrt{\frac{25}{4}} \text{ ou } x + \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x + \frac{3}{2} = +\frac{5}{2} \text{ ou } x + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{2}{2} = 1 \text{ ou } x = -\frac{8}{2} = -4$$

Logo, os números reais $-4$ e 1 são as raízes da equação dada.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Qual número real você deve adicionar a cada expressão a seguir para que se tenha um trinômio quadrado perfeito? Se necessário, utilize a interpretação geométrica, fazendo um esboço das figuras.

**a)** $x^2 + 8x$

**b)** $x^2 - 10x$

**c)** $x^2 + 2x$

**d)** $x^2 - 12x$

**e)** $x^2 + 9x$

**f)** $x^2 - 5x$

**g)** $x^2 - 30x$

**h)** $x^2 + x$

**i)** $x^2 - \frac{3}{2}x$

**j)** $x^2 + \frac{x}{3}$

**k)** $x^2 - 2ax$

**l)** $x^2 + 6ax$

**2.** Usando o processo geométrico de al-Khwarizmi, determine as raízes de cada uma das seguintes equações do 2º grau com uma incógnita no conjunto dos números reais:

**a)** $x^2 + 2x - 15 = 0$

**b)** $x^2 + 4x - 12 = 0$

**c)** $x^2 + 12x + 32 = 0$

**d)** $x^2 + 6x - 7 = 0$

**e)** $x^2 + 3x - 10 = 0$

**f)** $x^2 + 2x + 1 = 0$

**g)** $x^2 + 2x - 3 = 0$

**h)** $x^2 + 10x + 25 = 0$

**i)** $x^2 - 10x + 21 = 0$

**j)** $x^2 - 10x + 16 = 0$

**k)** $3x^2 - 2x - 1 = 0$

**l)** $10x^2 + 7x + 1 = 0$

### DESCUBRA MAIS

**Equação do 2º grau** (coleção Pra que serve Matemática?), de Luiz Marcio Pereira Imenes, Marcelo Cestari Lellis e José Jakubovic, editora Atual, 2004.

Neste livro, você verá a equação do 2º grau em diversas aplicações por meio de situações divertidas e interessantes.

No livro, há também outros métodos de resolução da equação do 2º grau utilizados ao longo da História, além de sua utilização por diversos pensadores, como al-Khwarizmi, Bhaskara, Arquimedes, Pitágoras, Galileu e Newton.

# O processo algébrico de Bhaskara

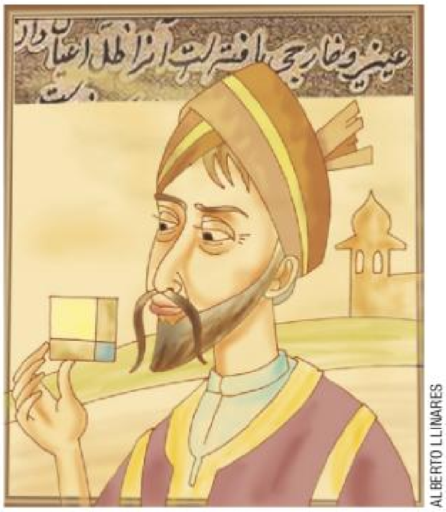
Voltemos a considerar as equações $x^2 + 6x + 8 = 0$ e $x^2 + 3x - 4 = 0$, que já resolvemos usando o processo geométrico de al-Khwarizmi.

- Em $x^2 + 6x + 8 = 0$, o número que acrescentamos aos dois membros da equação foi $9 = (3)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$.

$$\left(\frac{\boxed{6}}{2}\right)^2 \longrightarrow \textbf{coeficiente } b$$

- Em $x^2 + 3x - 4 = 0$, o número que acrescentamos aos dois membros da equação foi $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{\boxed{3}}{2}\right)^2 \longrightarrow \textbf{coeficiente } b$$




No século XII, o matemático hindu Bhaskara baseou-se em estudos de al-Khwarizmi para apresentar um processo algébrico que permitia resolver qualquer equação do 2º grau. Usando o processo de Bhaskara e partindo da equação escrita em sua forma reduzida, foi possível determinar, de maneira mais simples, as raízes de qualquer equação do 2º grau com uma incógnita.

Nas duas equações, nas quais o coeficiente *a* é igual a 1, o número acrescentado aos dois membros corresponde **à metade do coeficiente *b*, elevada ao quadrado**.

Esse fato foi constatado por Bhaskara ao estudar o processo de al-Khwarizmi. Bhaskara apresentou, então, um processo algébrico que não mais necessitava da interpretação geométrica para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita.

Veja a seguir o caminho trilhado por Bhaskara.

**1** Resolver a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 2x = 8$

$x^2 - 2x + 1^2 = 8 + 1^2$ ⟶ **adicionamos em ambos os membros da equação a expressão** $\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1^2$

$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1$

$(x - 1)^2 = 9$

$x - 1 = \pm\sqrt{9}$

$x - 1 = \pm 3$

Daí, temos:

$x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$

$x = 3 + 1 = 4$ $\qquad$ $x = -3 + 1 = -2$

Logo, os números reais −2 e 4 são as raízes da equação dada.

# Fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau com uma incógnita

Veja como podemos chegar à fórmula resolutiva:

| Dedução da fórmula resolutiva | | Processo algébrico de Bhaskara para o exemplo |
|---|---|---|
| $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ | | $x^2 + 4x - 12 = 0$ |
| $\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$ | | |
| $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ | | |
| $x^2 + \frac{b}{a}x + \cancel{\frac{c}{a}} - \cancel{\frac{c}{a}} = 0 - \frac{c}{a}$ | | |
| $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ | → | $x^2 + 4x = 12$ |
| $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$ | → | $x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 12 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$ |
| $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ | | |
| $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ | → | $x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$ |
| $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ | → | $(x + 2)^2 = 16$ |
| $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ | → | $(x + 2) = \pm\sqrt{16}$ |
| $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | → | $x + 2 = \pm 4$ |
| $x = -\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | → | $x = -2 \pm 4$ |
| $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | → | $x = 2$ ou $x = -6$ |

A fórmula $\mathbf{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ é chamada **fórmula resolutiva** da equação completa do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

A expressão $\mathbf{b^2 - 4ac}$ (que é um número real) é usualmente representada pela letra grega $\Delta$ (delta) e é chamada **discriminante da equação**.

Então, a fórmula resolutiva pode ser escrita assim: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

A fórmula resolutiva recebeu, também, o nome de **fórmula de Bhaskara** em homenagem ao grande matemático hindu.

A existência ou não de raízes reais, bem como o fato de elas serem duas iguais ou diferentes, depende, exclusivamente, do valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos $\Delta = b^2 - 4ac$ e consideramos:

- Quando $\Delta \geqslant 0$, a equação tem raízes reais $\begin{cases} \Delta > 0 \text{ (duas raízes diferentes)} \\ \Delta = 0 \text{ (duas raízes iguais)} \end{cases}$
- Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Vamos, agora, determinar as raízes de algumas equações do 2º grau com uma incógnita usando a fórmula resolutiva.

**1** Resolver a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$. Nessa equação, temos:

$a = 1$ $\quad b = 2$ $\quad c = -8$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (1)} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-2+6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \text{e} \\ x'' = \dfrac{-2-6}{2} = -\dfrac{8}{2} = -4 \end{cases}$$

Os números $-4$ e $2$ são as raízes reais da equação dada. Então: $S = \{-4, 2\}$.

**2** Resolver a equação $x^2 - 14x + 49 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$. Nessa equação, temos:

$a = 1$ $\quad b = -14$ $\quad c = 49$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (49) = 196 - 196 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais, dadas por:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-14)}{2(1)} = \frac{14}{2} = 7$$

O número 7 é a raiz real da equação dada.
Então: $S = \{7\}$.

**3** Resolver a equação $x^2 - 5x + 8 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$.

$a = 1$ $\quad b = -5$ $\quad c = 8$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (8) = 25 - 32 = -7$$

Como $\Delta < 0$, a equação dada não tem raízes reais.
Logo, $S = \varnothing$.

# ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Utilizando o processo algébrico de Bhaskara, determine as raízes das equações do 2º grau no conjunto dos números reais:

**a)** $x^2 + 4x - 5 = 0$

**b)** $2x^2 - 9x + 4 = 0$

**c)** $x^2 + 8x + 16 = 0$

**2.** As equações seguintes estão escritas na forma reduzida. Usando a fórmula resolutiva, determine o conjunto solução de cada equação no conjunto $\mathbb{R}$.

**a)** $x^2 - 3x - 28 = 0$

**b)** $x^2 + 12x + 36 = 0$

**c)** $6x^2 - x - 1 = 0$

**d)** $9x^2 + 2x + 1 = 0$

**3.** Resolva, no conjunto $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

**a)** $x^2 - 2x = 2x - 4$

**b)** $x^2 - 2x = x + 4$

**c)** $6x^2 + 3x = 1 + 2x$

**d)** $9x^2 + 3x + 1 = 4x^2$

**4.** Quantos números reais inteiros existem entre as raízes da equação $x^2 - 2x - 15 = 0$?

**5.** Veja estas equações:

$x^2 - 12x = 85$ $\qquad$ $x^2 + 51 = 20x$

Essas equações têm uma raiz real comum. Determine a soma das raízes não comuns.

**6.** Uma das raízes da equação $4x^2 - 21x + 20 = 0$ é um número fracionário. Qual é a soma dos termos dessa fração? (A fração deve ser simplificada.)

**7.** Sendo $U = \mathbb{R}$, determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau:

**a)** $(x + 2)^2 + x = 0$

**b)** $3x^2 = 2(x - 1)^2 + 3$

**8.** Considere a expressão algébrica $32 - [8x + (8 - 2x)(4 - x)]$. Determine os valores reais de *x* para que o valor numérico dessa expressão seja 8.

**9.** Considere a equação $\dfrac{x^2 - 4}{3} = \dfrac{x - 3}{2}$. Podemos afirmar que a maior das raízes dessa equação é um número primo? Por quê?

**10.** Vamos determinar o conjunto solução *S* de cada uma das seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$.

**a)** $x^2 - \dfrac{4}{5}x = \dfrac{1}{5}$

**b)** $x + \dfrac{x^2 + 4}{5} = 2$

**11.** Resolva as seguintes equações do 2º grau:

**a)** $x + 10 = -\dfrac{9}{x}$ (com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$).

**b)** $6x + 5 = \dfrac{3x + 5}{x - 1}$ (com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 1$).

**c)** $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{x - 1}$ (com $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ e $x \neq 1$).

**12.** Considere a igualdade $y = \dfrac{6}{x} + x - 3$. Quais são os valores reais de *x* para que se tenha $y = 4$?

**13.** O quadrado de um número real inteiro é igual a sete vezes o número, menos 6. Qual é esse número?

**14.** O quadrado da diferença entre um número real *x* e 3 é igual a cinco vezes o número *x* subtraído de 1. Qual é esse número *x*?

**15.** Quando você divide o polinômio $x^3 + 6x^2 - x - 6$ por $x + 1$, você tem uma divisão exata e um quociente $Q(x)$. Quais os valores reais de *x* que tornam o polinômio $Q(x)$ igual a 0?

**16.** Na figura a seguir, a soma dos números que estão na linha é igual à soma dos números que estão na coluna. Quais são os valores reais de *x* que tornam verdadeira essa afirmação?

| | | |
|---|---|---|
| $x^2$ | $-7$ | $6x$ |
| | | $13$ |
| | | $-x$ |

**17.** Os registros de temperatura tomados entre 0 hora e 24 horas de um dia em uma zona rural se ajustam à fórmula matemática $T = -\frac{1}{10}(x - 12)^2 + 10$, em que *T* representa a temperatura em graus Celsius, e *x* representa as horas do dia. A que horas do período da tarde a temperatura registrada foi de 9,6 °C?

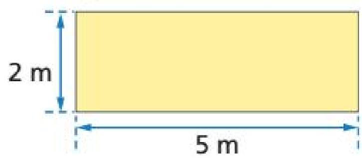
**18.** Uma pessoa distribui 240 balas para um número *x* de crianças. Se cada criança receber uma bala a menos, o número de balas que cada criança vai receber será igual ao número de crianças. Qual é o valor de *x*?

**19.** Um terreno retangular tem 1 100 $m^2$ de área. A frente desse terreno tem 28 metros a menos que a lateral. Quais são as dimensões desse terreno?

**20.** Usando a fórmula matemática $d = \frac{n(n - 3)}{2}$, que relaciona o número de diagonais **(d)** e o número de lados **(n)** de um polígono, calcule o número de lados do polígono que tem:

**a)** 9 diagonais. **b)** 20 diagonais.

**21.** Um retângulo apresenta as medidas indicadas na figura.

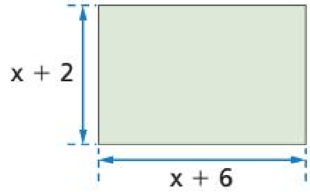



Se aumentarmos o comprimento e a largura na mesma quantidade, a área do novo retângulo será 7 vezes a área do retângulo original.

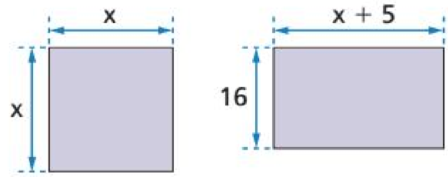
**a)** Quais as dimensões do novo retângulo?

**b)** Qual é o perímetro do novo retângulo?

**22.** O piso de um galpão retangular tem 140 $m^2$ de área. As medidas dos lados desse piso, em metros, estão indicadas na figura. Quais são essas medidas?



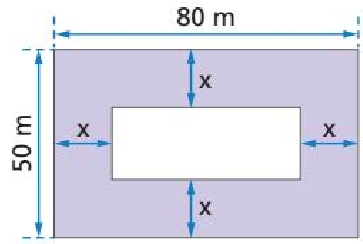

**23.** O quadrado e o retângulo seguintes têm a mesma área.



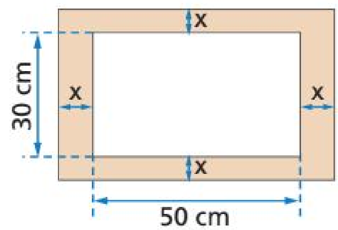

**a)** Qual a medida do lado e o perímetro do quadrado?

**b)** Qual o perímetro do retângulo?

**24.** Em um terreno retangular de 80 m por 50 m, foi construído um barracão que serve de depósito para uma firma. Esse depósito ocupa uma área de 1 000 $m^2$. Em torno do barracão, há um recuo de *x* metros de cada lado para um gramado (ver figura). Qual é a medida *x* desse recuo?




**25.** A tela de um quadro tem a forma retangular e mede 50 cm e 30 cm. Nessa tela, foi colocada uma moldura, também retangular, de largura *x*. Calcule essa largura, sabendo que o quadro todo passou a ocupar uma área de 2 400 $cm^2$.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

# TECNOLOGIAS

## Resolução de equação do 2º grau

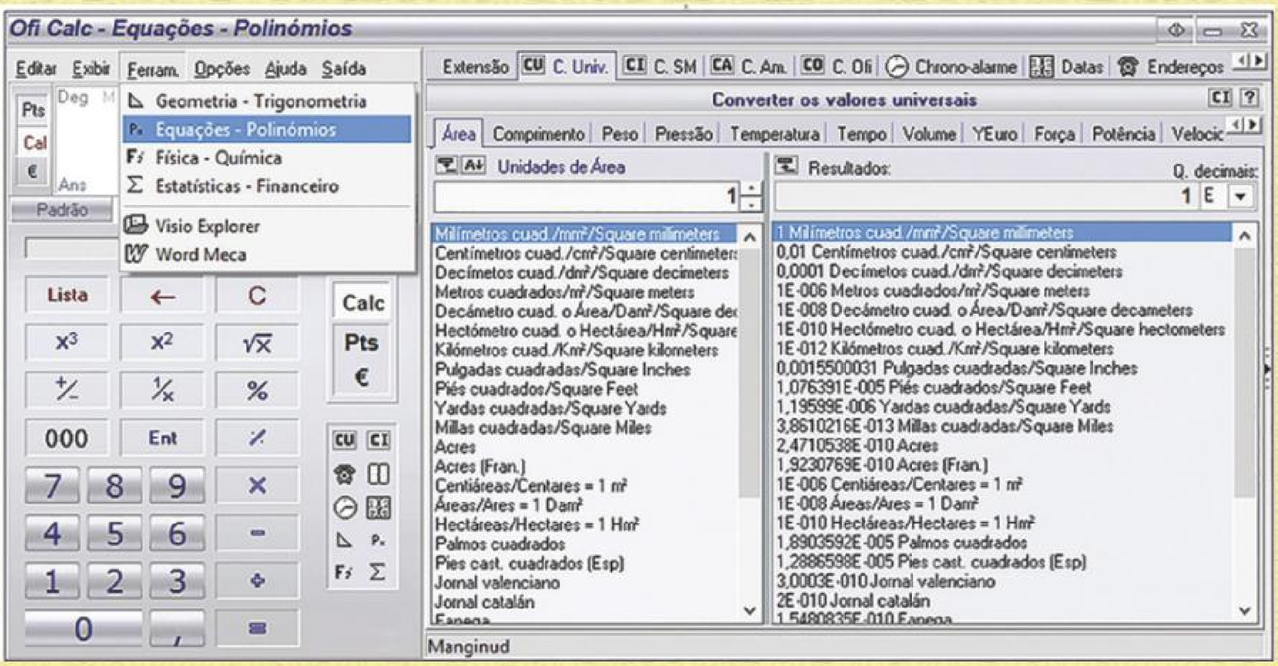
Nesta seção, exploraremos o campo destinado à resolução de equação do 2º grau do Ofi Calc, que é um *software* disponível para *download* gratuito no *site* <http://livro.pro/tbfg5r>. Acesso em: 16 nov. 2018.

Além de poder nos auxiliar a resolver operações básicas, o Ofi Calc possui diversas outras ferramentas, por exemplo, uma para resolver equações do 2º grau.

Esse *software* é de grande utilidade para auxiliá-lo na conferência de resultados e não deve substituir os cálculos feitos por você.

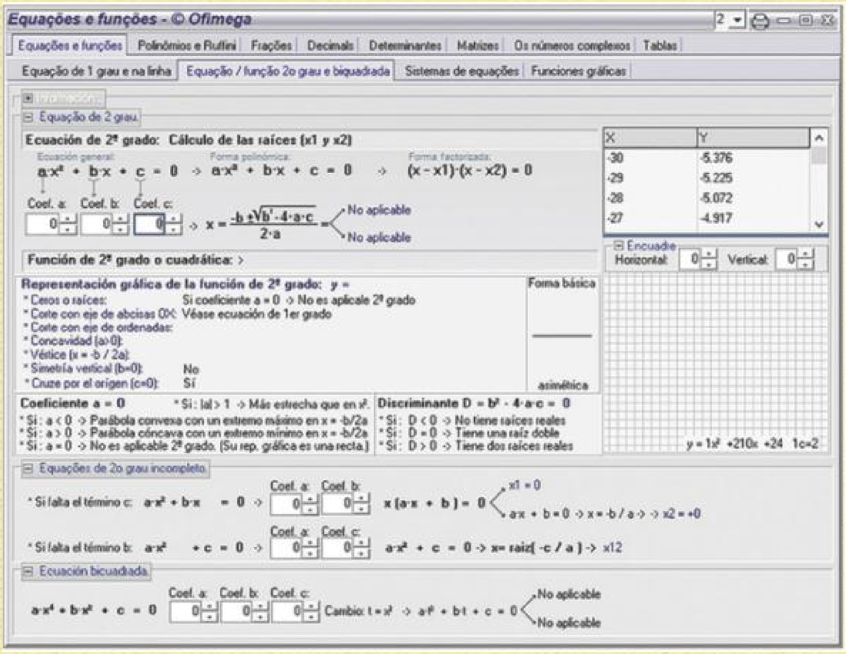
Veja como podemos utilizar o Ofi Calc.

Clique na aba **Ferramentas** (Ferram.) e, depois, em **Equações – Polinômios**.

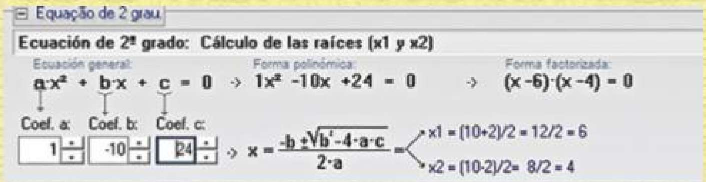



OFI CALC

Teremos nova tela e nela devemos selecionar a aba **Equação/função do 2º grau e biquadrada**.




OFI CALC




Teremos uma tela em que podemos preencher os valores dos coeficientes de uma equação do 2º grau e obter a resolução.

Por exemplo: para resolver a equação $x^2 - 10x + 24 = 0$, basta completar os campos dos coeficientes com $a = 1$, $b = -10$ e $c = 24$ que o *software* retornará às raízes e à forma fatorada da equação.

**1.** Agora, com o auxílio do *software* Ofi Calc, obtenha as raízes das seguintes equações do 2º grau:

**a)** $4x^2 - 11x + 26 = 0$

**b)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

**c)** $3x^2 - 53x = 0$

**2.** Verifique se nos itens *b* e *c* os valores apresentados pelo *software* são de fato raízes das equações dadas.

**3.** Explore, com um amigo, outras ferramentas do *software*.

CAPÍTULO 3

# SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

## Soma das raízes

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e $x'$ e $x''$ as raízes reais dessa equação.

Entre as raízes $x'$ e $x''$ e os coeficientes *a*, *b* e *c* da equação existem duas relações importantes, as quais veremos a seguir.

**1ª relação:** Sendo $x'$ e $x''$ as raízes reais da equação, temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**Adicionando** membro a membro essas duas igualdades, obtemos a 1ª relação.

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{-b}{a}$$

Em toda equação do 2º grau, em que $x'$ e $x''$ são raízes reais, temos $\mathbf{x' + x'' = \frac{-b}{a}}$.

## Produto das raízes

**2ª relação:** Sendo $x'$ e $x''$ as raízes reais da equação, temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**Multiplicando** membro a membro as duas igualdades, obtemos a 2ª relação.

$$x' \cdot x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, fazemos a substituição a seguir.

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4}ac}{\cancel{4}a \cdot a} = \frac{c}{a}$$

Então, nas equações do 2º grau, em que $x'$ e $x''$ são raízes reais, temos $\mathbf{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$.

Vamos, agora, usar essas duas relações importantes para resolver este problema.

**1** A equação $3x^2 - 8x - 3 = 0$ apresenta duas raízes reais e diferentes. Sem resolver a equação, determine a soma e o produto dessas duas raízes.

Pela equação dada:

$a = 3$ $\quad b = -8$ $\quad c = -3$

De acordo com as relações, podemos escrever:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3} \qquad x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-3}{3} = -1$$

Logo, a soma das raízes da equação é $\frac{8}{3}$, e o produto dessas raízes é $-1$.

## Escrevendo uma equação quando conhecemos as raízes

Podemos aplicar a relação entre as raízes e os coeficientes da equação do 2º grau para escrever a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$ quando são dados dois números reais ($x'$ e $x''$) como raízes da equação. Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Como $a \neq 0$, vamos dividir todos os termos pelo coeficiente *a*:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (1)$$

Sendo $x'$ e $x''$ as raízes reais da equação, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a} = x' + x'' \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x' + x'') \quad (2)$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = x' \cdot x'' \quad (3)$$

Substituindo (1) e (3) na equação (1): $x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x'' = 0$

Se indicarmos por *S* a soma das raízes ($x' + x'' = S$) e por *P* o produto dessas raízes ($x' \cdot x'' = P$), escrevemos a equação na forma:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Dessa forma, obtemos uma equação do 2º grau na incógnita *x* quando são dadas as raízes $x'$ e $x''$.

Consideremos, então, o exemplo a seguir.

**1** Determinar a equação do 2º grau na incógnita *x*, sabendo que as raízes dessa equação são os números reais $-3 + \sqrt{3}$ e $-3 - \sqrt{3}$.

$S = (-3 + \sqrt{3}) + (-3 - \sqrt{3}) = -3 + \cancel{\sqrt{3}} - 3 - \cancel{\sqrt{3}} = -6$

$P = (-3 + \sqrt{3}) \cdot (-3 - \sqrt{3}) = (-3)^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-6)x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 6 = 0$

Logo, a equação procurada é $x^2 + 6x + 6 = 0$.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Todas as equações seguintes têm raízes reais diferentes. Sem resolvê-las, calcule a soma e o produto dessas raízes.

**a)** $x^2 - x - 20 = 0$

**b)** $16x^2 + 8x + 1 = 0$

**c)** $6x^2 - 4x - 3 = 0$

**d)** $10x^2 + 3x - 4 = 0$

**2.** A equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ tem duas raízes reais diferentes, expressas por $x'$ e $x''$. Sem resolver a equação, determine o valor de:

**a)** $x' + x''$

**b)** $x' \cdot x''$

**c)** $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$

**3.** Escreva as equações na forma reduzida e, sem resolvê-las, determine a soma *S* e o produto *P* das raízes de cada uma.

**a)** $\frac{x-1}{4} = \frac{5}{x-2}$

**b)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$

**c)** $\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x-1} = 5$

**4.** Se *S* é a soma e *P* é o produto das raízes reais da equação $x^2 - 11x + 28 = 0$, qual é o valor de $S - P$?

**5.** Considere a equação a seguir:

$$\boxed{x^2 - 0{,}8x - 1{,}6 = 0}$$

Sendo *S* a soma e *P* o produto das raízes reais dessa equação, determine $\frac{S}{P}$.

**6.** Determine a soma e o produto das raízes de cada uma das equações a seguir, sem resolvê-las.

**a)** $x^2 - 4\sqrt{2}x + 3 = 0$

**b)** $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$

**7.** Dada a equação $10x^2 - 7x + c = 0$, determine o valor do coeficiente *c* de maneira que o produto das raízes reais dessa equação seja igual a $\frac{1}{8}$ (Dê a resposta na forma decimal.)

**8.** Se na equação $mx^2 - \frac{8}{m}x + 2 = 0$, com $m \neq 0$, a soma *S* das raízes é 2, qual é o valor de *m*?

**9.** Considere a equação a seguir:

$$\boxed{x^2 - 3mx + m = 0}$$

Se a soma das raízes dessa equação é 15, qual é o produto dessas raízes?

**10.** Considere que o produto das raízes da equação $x^2 - 2mx + m = 0$ é 4, qual é a soma dessas raízes?

**11.** As raízes reais de $2x^2 + 5x + h - 5 = 0$ são tais que uma delas é igual ao inverso da outra $\left(x' = \frac{1}{x''}\right)$. Nessas condições, determine o valor de *h*.

**12.** Na equação $4x^2 - 2(k - 1)x - 1 = 0$, as raízes são opostas ou simétricas. Nessas condições, qual é o valor de *k*?

**DESAFIO**

Junte-se a um colega e resolva os desafios a seguir:

**13.** Descubra mentalmente as raízes de cada uma das equações a seguir.

**a)** $x^2 - 5x + 6 = 0$

**b)** $x^2 - 10x + 24 = 0$

**c)** $x^2 - 4x - 12 = 0$

**14.** As raízes da equação $3x^2 - 15x + 12 = 0$ são as medidas dos lados de um retângulo. Descubra mentalmente as raízes e calcule a área e o perímetro desse retângulo.

CAPÍTULO

4

# MAIS EQUAÇÕES

## Equações biquadradas

Denomina-se equação biquadrada na incógnita *x* toda equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$.

As equações a seguir são biquadradas:0

- $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- $9x^4 - 6x^2 = 0$
- $x^4 + 20x^2 - 3 = 0$
- $16x^4 - 2 = 0$

Podemos notar que as equações biquadradas são equações incompletas de 4º grau, desprovidas dos termos em que a incógnita teria expoente ímpar.

A resolução das equações biquadradas envolve um artifício, conforme veremos nos exemplos a seguir.

**1** Resolver a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, considerando $U = \mathbb{R}$.

Vamos, inicialmente, indicar $x^2 = p$, usando a incógnita auxiliar *p*.

Substituindo $x^2$ por *p* na equação dada, temos:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$

$p^2 - 5p + 4 = 0 \longrightarrow$ **equação do 2º grau na incógnita p**

Nessa equação, temos:

$a = 1 \qquad b = -5 \qquad c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4) = 25 - 16 = 9$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (1)} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} p' = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \text{e} \\ p'' = \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

As raízes 4 e 1 são valores reais da incógnita *p*. Como fizemos $x^2 = p$, precisamos, agora, obter os valores de *x*, que serão as raízes da equação biquadrada. Assim:

Para $p = 4$, temos: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

Para $p = 1$, temos $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$

Então: $S = \{-2, 2, -1, 1\}$.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Determine, no conjunto $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das seguintes equações biquadradas:

**a)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

**b)** $x^4 - 4 = 3x^2$

**c)** $x^4 - 16x^2 = 0$

**d)** $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

**2.** Para que valores reais de *x* as expressões a seguir apresentam valores numéricos iguais?

$\boxed{11x^4 - 6x^2}$ $\boxed{x^2 + 4}$

**3.** Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações, sendo $U = \mathbb{R}$:

**a)** $(x^2 - 1)(x^2 - 12) + 24 = 0$

**b)** $(x^2 + 2)^2 = 2 \cdot (x^2 + 6)$

**c)** $(x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) + 5x^2 = 20$

**d)** $x^2 (x^2 - 9) = -20$

**4.** Qual é a soma das raízes reais positivas desta equação?

$\boxed{x^4 - 26x^2 + 25 = 0}$

**5.** Considere a equação $x^2 - 2 = \dfrac{6}{x^2 - 1}$, em que $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Essa equação tem quantas raízes reais?

**6.** Todas as raízes da equação $x^2 + \dfrac{2}{x^2} = 3$, com $x \neq 0$, são números reais. Essa afirmação é correta? Justifique.

# Equações irracionais

Como já vimos, toda equação que apresenta a incógnita no radicando é chamada equação irracional.

Para transformar uma equação irracional em uma equação racional, elevamos os dois membros da equação a uma potência conveniente.

Ao fazer isso, podemos considerar raízes que não valem para a equação irracional dada; portanto, sempre temos de fazer a verificação dos resultados encontrados.

Consideremos, então, os exemplos a seguir.

**1** Resolver a equação $\sqrt{x + 5} = x - 1$.

Nessa equação, devemos ter *x* real, tal que $x \geqslant 5$, ou seja, $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$. Note que *x* também deve ser maior que 1 para que $x - 1$ não seja negativo, já que, no conjunto dos números reais, o resultado de uma raiz quadrada não pode ser negativo.

$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (x - 1)^2$ ⟶ elevamos os dois membros ao quadrado

$x + 5 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 3x - 4 = 0$ ⟶ equação racional a ser resolvida

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (1)} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \text{e} \\ x'' = \dfrac{3-5}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

Determinamos, assim, as raízes da equação racional do 2º grau.

Para determinar as raízes da equação irracional dada, precisamos fazer uma verificação com os valores obtidos para a incógnita *x*.

Veja a verificação.

Logo, apenas o número 4 satisfaz a equação irracional dada.

| Para x = 4, temos: | Para x = −1, temos: |
|---|---|
| $\sqrt{4+5} = 4 - 1$ | $\sqrt{(-1)+5} = (-1) - 1$ |
| $\sqrt{9} = 3$ | $\sqrt{4} = -2$ |
| $3 = 3$ (verdadeira) | $2 = -2$ (falsa) |

Então: $S = \{4\}$.

**2** Vamos resolver a equação $\sqrt{x-3} + 5 = x$.

Nessa equação, devemos ter *x* real, tal que $x \geqslant 3$, ou seja, $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

$\sqrt{x-3} + 5 = x$

$\sqrt{x-3} = x - 5$ ⟶ isolamos o radical no primeiro membro

Aqui podemos ver que *x* deve ser maior que 5 para que a raiz quadrada seja um número positivo.

$(\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2$ ⟶ elevamos os dois membros ao quadrado

$x - 3 = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 11x + 28 = 0$ ⟶ equação racional a ser resolvida

$a = 1 \qquad b = -11 \qquad c = 28$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (28) = 121 - 112 = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (1)} = \frac{11 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{11+3}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \\ \text{e} \\ x'' = \dfrac{11-3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Fazendo a verificação.

| Para x = 7, temos: | Para x = 4, temos: |
|---|---|
| $\sqrt{7-3} + 5 = 7$ | $\sqrt{4-3} + 5 = 4$ |
| $\sqrt{4} + 5 = 7$ | $\sqrt{1} + 5 = 4$ |
| $2 + 5 = 7$ (verdadeira) | $1 + 5 = 4$ (falsa) |

Logo, $S = \{7\}$.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Resolva a equação irracional $\sqrt{x-1} = 3 - x$.

**2.** Quais os valores reais de *x* para os quais a expressão $\sqrt{x^2 - 6x + 16}$ é igual a $2\sqrt{2}$?

**3.** Qual é o conjunto solução da equação $4 - x = \sqrt{x+2}$?

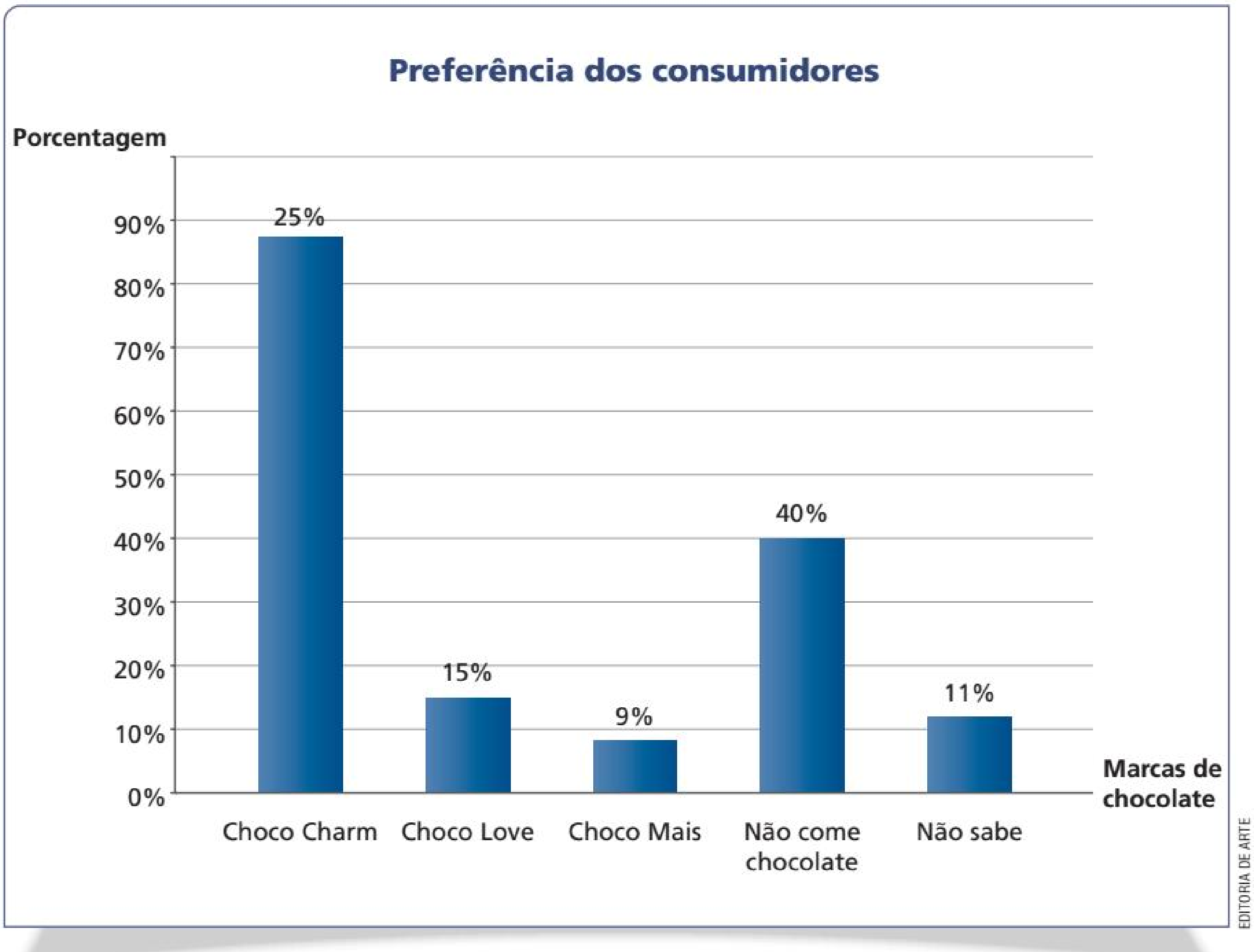
**4.** Para quais valores reais de *x* as expressões $\sqrt{x^2 - 9}$ e $\sqrt{x + 11}$ apresentam o mesmo valor?

**5.** Resolva a equação irracional $\sqrt{7x-3} - 1 = x$.

**6.** Qual é o valor real *x* que torna a expressão $\sqrt{x^2 - x + 4}$ igual a 4?

## Os gráficos e a importância de sua representação correta

**1.** Uma empresa que produz chocolates, a ChocoCharm decidiu fazer uma pesquisa de mercado para verificar, dentre as marcas oferecidas, qual a preferida pelos consumidores. Em seguida, construiu um gráfico de barras para apresentar os resultados:




Fonte: Pesquisa da ChocoCharm

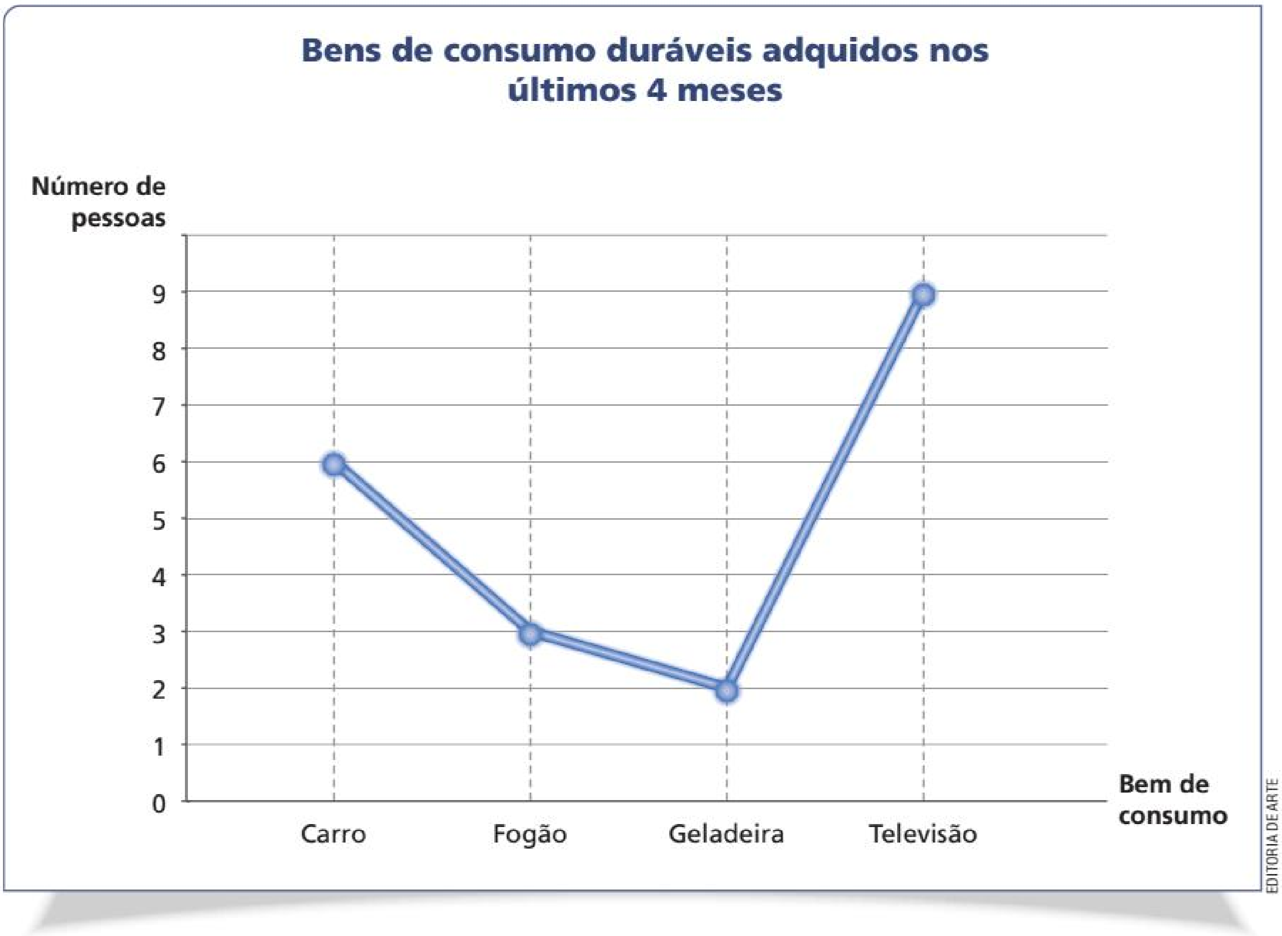
**a)** Qual o percentual de consumidores que escolheram a ChocoCharm?

**b)** Você considera que o tamanho da barra apresentada no gráfico, para representar o percentual de consumidores que preferem ChocoCharm está correto? Explique.

**c)** Imagine que esse gráfico tenha sido publicado em um meio de comunicação, como um jornal ou uma revista. Um leitor poderia ser levado a se confundir com os dados apresentados no gráfico?

**d)** Construa o gráfico que representa corretamente as informações dadas.

**2.** O gráfico de linhas a seguir está representando a quantidade de bens de consumo duráveis adquiridos pelos pesquisados nos últimos 4 meses:




Fonte: Dados fictícios

**a)** Observando o gráfico, é possível afirmar que houve uma queda na compra de veículos?

**b)** Copie e complete a tabela a seguir no seu caderno, a partir das informações do gráfico.

**Bens de consumo duráveis**

| Bens duráveis | Quantidade |
|---|---|
| Carro | |
| Fogão | |
| Geladeira | |
| Televisão | |

Fonte: Dados fictícios

**c)** A partir das informações da tabela, construa um gráfico de barras, relacionando a quantidade de bens duráveis adquiridos pelos pesquisados nos últimos 4 meses.

**d)** O gráfico de linhas é adequado para representar as grandezas envolvidas nessa atividade? Explique.

# RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

**1.** Considere a equação $5x + 9 = 5 + \frac{1}{x}$, com $x \neq 0$. A menor raiz dessa equação é o número real:

**a)** $\frac{1}{5}$
**b)** 5
**c)** 1
**d)** −1
**e)** $-\frac{1}{5}$

**2.** Observe a equação a seguir.

$$\boxed{x(4x - 1) = 3(x + 1)}$$

Uma das raízes dessa equação é o número:

**a)** 1,5
**b)** 21,5
**c)** 0,5
**d)** 2,5
**e)** 1

**3.** Se $x'$ e $x''$ (com $x' > x''$) são as duas raízes reais da equação $x - \frac{12}{x} = 1$, com $x \neq 0$, o valor da expressão $(x' - x'')^2$ é:

**a)** 36
**b)** 45
**c)** 49
**d)** 64
**e)** 81

**4.** Sabe-se que *x* é um número real inteiro, diferente de 0, tal que $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$. Nessas condições, o valor numérico da expressão $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é:

**a)** 51
**b)** 53
**c)** 59
**d)** 61
**e)** $\frac{65}{8}$

**5.** Considerando que a equação $x^2 + 11 = 12x$ tem duas raízes reais diferentes, pode-se dizer que a média aritmética dessas raízes é:

**a)** 8
**b)** 6
**c)** 5
**d)** 4
**e)** 3

**6.** Considere a equação $5x^2 + 6 = 31x$. Uma das raízes dessa equação é expressa por uma fração. A soma dos termos da fração que expressa essa raiz é:

**a)** 10
**b)** 9
**c)** 8
**d)** 7
**e)** 6

**7.** Determine os números reais *x* que fazem com que as expressões $\sqrt{x + \sqrt{x - 1}}$ e $\sqrt{7}$ tenham o mesmo valor numérico.

**8.** Qual é a solução da equação

$$\sqrt{\frac{x}{4 - x}} = \sqrt{\frac{4 - x}{2}} \text{ (com } x \neq 4\text{)?}$$

**9.** Considere $V = 2k + \frac{h^2}{5}$. Quando $V = 25$ e $5k = 2,5$, temos para *h* dois valores, que são:

**a)** −10 e 10.
**b)** −5 e 5.
**c)** −11 e 11.
**d)** −15 e 15.
**e)** −9 e 9.

**10.** O menor valor de *x* que verifica a igualdade $y = -\frac{4}{x} + x - 1$, quando $y = 2$, é o número real:

**a)** 4
**b)** 2
**c)** 1
**d)** −1
**e)** −2

**11.** A equação $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4. Qual é a outra raiz dessa equação?

**a)** 4
**b)** 2
**c)** −2
**d)** −4
**e)** −6

**12.** A equação $x^2 + (2m - 3)x + m^2 + 3 = 0$ tem duas raízes reais diferentes. Nessas condições, devemos ter:

**a)** $m < \frac{1}{4}$

**b)** $m < -\frac{1}{4}$

**c)** $m \geqslant \frac{1}{4}$

**d)** $m \geqslant -\frac{1}{4}$

**e)** $m < -2$

**13.** Na equação $px^2 - 2(q - 1)x + 6 = 0$, a soma das raízes é $-3$, e o produto das raízes é 3. Nessas condições, qual é o valor de $q$?

**a)** 3

**b)** 2

**c)** 1

**d)** $-1$

**e)** $-2$

**14.** Se $S$ é o número que expressa a soma e $P$ o número que expressa o produto das raízes da equação $2x^2 + 5x - 3 = 0$, então a razão $\frac{S}{P}$ vale:

**a)** $\frac{5}{3}$

**b)** $-\frac{5}{3}$

**c)** $\frac{3}{5}$

**d)** $-\frac{3}{5}$

**e)** $-\frac{2}{3}$

**15.** O valor de $x$ que satisfaz a equação $\sqrt{2x^2 - 4x + 9} = 2x - 3$ é um número real que está entre:

**a)** 1 e 3.

**b)** 2 e 4.

**c)** 3 e 5.

**d)** 4 e 6.

**e)** 5 e 7.

**16.** Ao subtrair 3 de certo número real $x$, você obtém o dobro da raiz quadrada desse número $x$. Então, o valor de $x$ é:

**a)** 1

**b)** 9

**c)** 4

**d)** 16

**e)** 5

## UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos as equações do 2º grau com uma incógnita completa e incompleta. Verificamos como escrever uma equação desse tipo na forma reduzida e os métodos de resolução dela.

Estudamos o processo de completar quadrados e a fórmula resolutiva que leva o nome do matemático indiano Bhaskara.

Também estudamos duas variações da equação do 2º grau: a equação biquadrada, que na verdade é uma equação do 4º grau incompleta, e as equações irracionais.

Na abertura da Unidade, tratamos de uma aplicação da equação do 2º grau na Física, descoberta por Galileu Galilei: a queda livre dos corpos.

Vamos retomar as aprendizagens desta Unidade e refletir respondendo às seguintes questões no caderno:

- Em que caso uma equação do 2º grau tem duas raízes reais distintas?
- Como podemos escrever uma equação do 2º grau conhecendo suas raízes?
- No início da Unidade você foi convidado a resolver uma equação. Agora, utilizando a fórmula resolutiva, resolva a equação novamente. O resultado encontrado foi o mesmo?

## Cultura afro-brasileira se manifesta na música, religião e culinária

Somente a partir do século XX as manifestações, os rituais e costumes africanos começaram a ser aceitos e celebrados como expressões artísticas genuinamente nacionais.

Você sabia dessa informação? Converse com seus colegas e professor.

SERGIO PEDREIRA/PULSAR IMAGENS

A cultura negra é um elemento essencial para a formação da identidade brasileira

"O Brasil tem a maior população de origem africana fora da África e, por isso, a cultura desse continente exerce grande influência, principalmente, na região Nordeste do Brasil.

Hoje, a cultura afro-brasileira é resultado também das influências dos portugueses e indígenas, que se manifestam na música, religião e culinária.

Devido à quantidade de escravos recebidos e também pela migração interna destes, os estados de Maranhão, Pernambuco, Alagoas, Bahia, Minas Gerais, Espírito Santo, Rio de Janeiro, São Paulo e Rio Grande do Sul foram os mais influenciados.

No início do século XIX, as manifestações, rituais e costumes africanos eram proibidos, pois não faziam parte do universo cultural europeu e não representavam sua prosperidade. Eram vistas como retrato de uma cultura atrasada.

Mas, a partir do século XX, começaram a ser aceitos e celebrados como expressões artísticas genuinamente nacionais e hoje fazem parte do calendário nacional com muitas influências no dia a dia de todos os brasileiros.

Em 2003, a lei nº 10.639 passou a exigir que as escolas brasileiras de ensino fundamental e médio incluíssem no currículo o ensino da história e cultura afro-brasileira.

Fonte: GOVERNO DO BRASIL. **Cultura afro-brasileira se manifesta na música, religião e culinária.** Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/noticias/cultura/2009/10/cultura-afro-brasileira-se-manifesta-na-musica-religiao-e-culinaria>. Acesso em: 7 nov. 2018.

- Entre as heranças da cultura afro-brasileira podemos destacar a música, a capoeira, a religião e a culinária. O que você sabe sobre cada uma dessas heranças?
- Você conhece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)? Se sim, que informações possui acerca desse documento?
- Reúna-se com três colegas e, juntos, pesquisem informações sobre os temas contemporâneos descritos na BNCC.

## Língua

[...] As línguas africanas exerceram tanta influência no modo de falar do povo brasileiro que a nossa língua já é considerada diferente do Português de Portugal. Na Bahia, são usadas cerca de 5 mil palavras de origem africana. A maior parte das palavras que enriqueceram o vocabulário brasileiro vêm do quimbundo, língua do povo banto. Na época da escravidão, o quimbundo era a língua mais falada nas regiões Norte e Sul do país. [...]

Fonte: FRANZIN, A. **Você sabe qual é a importância da cultura negra para a história do Brasil?** Disponível em: <http://www.ebc.com.br/infantil/voce-sabia/2012/11/voce-sabe-qual-e-a-importancia-da-cultura negra-para-a-historia-do>. Acesso em: 7 nov. 2018.

Você sabia que "o português falado no Brasil é resultado de um amplo e complexo processo de transformação ao longo dos anos" e, na Bahia são usadas cerca de 5 mil palavras de origem africana? A maioria dessas palavras vêm do quimbundo, língua do povo banto.

- Forme dupla com um colega e, juntos, realizem uma pesquisa para descobrir o significado das palavras da tabela.

| Palavra | Significado |
|---|---|
| BANZÉ | |
| BIBOCA | |
| CAFUNÉ | |
| CAPENGA | |
| FUZUÊ | |
| MUCAMA | |
| ZABUMBA | |

- Vocês já utilizaram alguma ou algumas dessas palavras? Se sim, em qual situação?

## Culinária

[...] Ingredientes como o leite de coco, a pimenta malagueta, o gengibre, o milho, o feijão preto, as carnes salgadas e curadas, o quiabo, o amendoim, o mel, a castanha, as ervas aromáticas e o azeite de dendê não eram conhecidos nem usados no Brasil antes da chegada deles. Muitos pratos conhecidos e apreciados aqui vieram de lá: vatapá, o caruru, o abará, o abrazô, o acaçá, o acarajé, o bobó, os caldos, o cozido, a galinha de gabidela, o angu, a cuscuz salgado, a moqueca e a famosa feijoada. E os doces? [...]

Fonte: FRANZIN, A. **Você sabe qual é a importância da cultura negra para a história do Brasil?** Disponível em: <http://www.ebc.com.br/infantil/voce-sabia/2012/11/voce-sabe-qual-e-a-importancia-da-cultura negra-para-a-historia-do>. Acesso em: 7 nov. 2018.

- Com a mesma dupla, realizem uma pesquisa para descobrir alguns doces, consumidos em nosso país, da cultura africana.

# 4 RELAÇÕES ENTRE ÂNGULOS

Podemos perceber que a Matemática tem uma relação muito próxima com a Arte, principalmente quando olhamos para a Geometria.

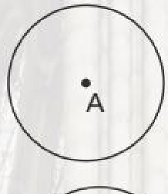
Uma dessas relações pode ser observada no trabalho com rosáceas, construções com vidro muito comuns nas catedrais de estilo gótico.

Uma rosácea é obtida com base em processos de desenho geométrico. Observe a imagem apresentada ao lado e o processo de construção de um exemplo de rosácea.

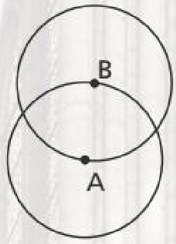
SYDA PRODUCTIONS/SHUTTERSTOCK.COM; FLORIAN MONHEIM/IMAGEFOTOSTOCK/EASYPIX

Agora é com você!

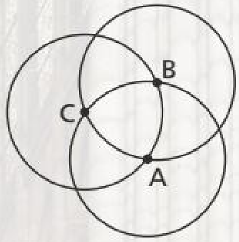
- **Utilizando um compasso, desenhe e construa algumas rosáceas. Lembre-se de tentar fazer uma composição harmônica.**
- **Utilizando um *software* livre de Geometria dinâmica, elabore uma rosácea com base na ferramenta de criar círculos. Você pode usar uma ferramenta *on-line*. Um exemplo de ferramenta está disponível em GeoGebra *on-line*: <http://livro.pro/hssovj>. Acesso em: 12 nov. 2018.**
- **Observe a primeira e a última imagens do processo de construção da rosácea. A primeira imagem é somente a linha em torno do centro, a última imagem é composta dessa linha e de toda a região interna. Como diferenciar matematicamente esses dois casos?**



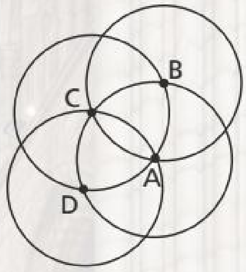

**1** Trace uma circunferência de raio qualquer.




**2** Com a ponta-seca do compasso em qualquer ponto da circunferência e com a mesma abertura usada no passo anterior, trace uma nova circunferência.




**3** Com a ponta-seca do compasso em um dos pontos onde as duas circunferências desenhadas se cruzam, e com a mesma abertura usada nos passos anteriores, trace uma nova circunferência.




**4** Com a ponta-seca do compasso no ponto onde somente a primeira e a terceira circunferências desenhadas se cruzam, e com a mesma abertura usada nos passos anteriores, trace uma nova circunferência.

**5** Continue esses passos com novas circunferências até obter uma figura semelhante a essa ao lado. Depois basta colorir.

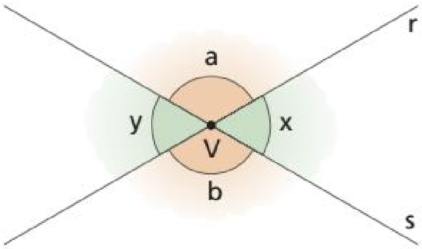
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Interior da Catedral Saint-Denis, França.

# ÂNGULOS DETERMINADOS POR RETAS TRANSVERSAIS

## Ângulos opostos pelo vértice

Consideremos duas retas, *r* e *s*, que se cruzam em um ponto *V*, formando quatro ângulos de medidas: *a*, *x*, *b* e *y*, conforme mostra esta figura.



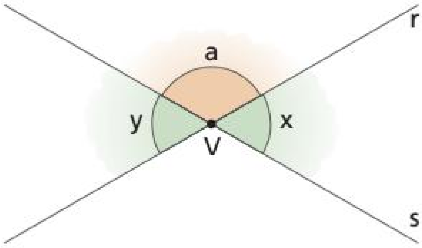

Os ângulos de medidas *x* e *y* são chamados **ângulos opostos pelo vértice** (o.p.v.). Também são opostos pelo vértice os ângulos de medidas *a* e *b*.

Observe que os lados do ângulo de medida *a* são formados pelos prolongamentos dos lados do ângulo de medida *b*.

> Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

Vamos mostrar que essa afirmação é verdadeira.

Pela figura, podemos notar que:




- $x + a = 180°$
- $y + a = 180°$

Então:

$x + a = y + a$

Cancelando *a* nos dois membros, obtemos:

$x = y$

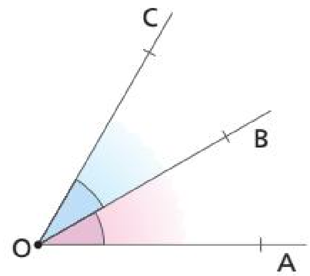
Portanto, dois ângulos opostos pelo vértice sempre têm a mesma medida.

Você poderia também verificar que as medidas de ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida usando um transferidor. Basta medir quantos graus tem cada um dos ângulos. Você vai perceber que eles são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

## Ângulos adjacentes

Dois ângulos são **consecutivos** quando eles possuem o mesmo vértice e têm um lado comum.

Na figura ao lado, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos consecutivos. Note que eles têm em comum apenas o lado $\overline{OB}$, e não têm pontos internos comuns.



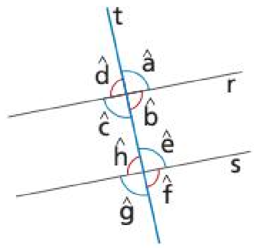

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos comuns são chamados **ângulos adjacentes**.

Então, em nosso exemplo, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos adjacentes.

Observe, agora, $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$. Eles têm um lado comum $(\overline{OA})$ e possuem o mesmo vértice (*O*); logo, são ângulos consecutivos. No entanto, eles têm pontos internos comuns. Por esse motivo, $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ não são ângulos adjacentes.

# Ângulos correspondentes



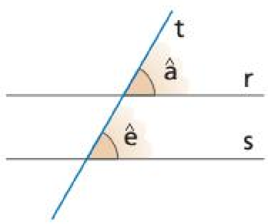
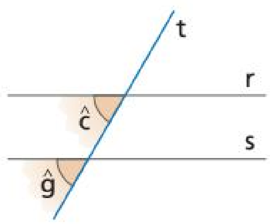
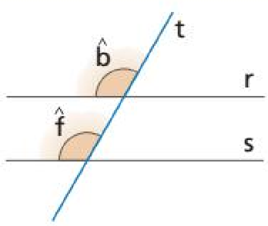
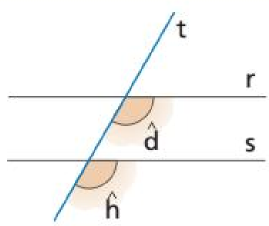

Dadas duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, obtemos oito ângulos. Veja.

Os pares de ângulos $\hat{a}$ e $\hat{e}$; $\hat{b}$ e $\hat{f}$; $\hat{c}$ e $\hat{g}$; $\hat{d}$ e $\hat{h}$ são chamados ângulos correspondentes.

Sabemos que $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são opostos pelo vértice, assim como $\hat{e}$ e $\hat{g}$. Portanto a medida desses ângulos é a mesma, ou seja, $a = c$ e $e = g$. Porém, como $r // s$, também podemos concluir que $a = e$ e $d = g$.

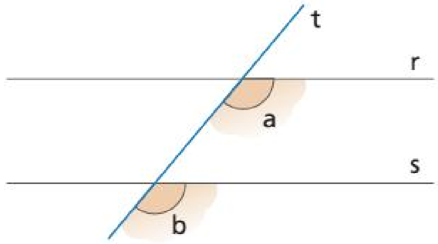
Dadas duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, os ângulos correspondentes são congruentes.

Se a reta transversal corta duas retas determinando ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são paralelas ($\hat{a} \cong \hat{e} \rightarrow r // s$).

| | |
|---|---|
|  $\hat{a}$ e $\hat{e}$ são ângulos correspondentes. $r // s \Leftrightarrow \hat{a} \cong \hat{e}$ |  $\hat{c}$ e $\hat{g}$ são correspondentes. $r // s \Leftrightarrow \hat{c} \cong \hat{g}$ |
|  $\hat{b}$ e $\hat{f}$ são correspondentes. $r // s \Leftrightarrow \hat{b} \cong \hat{f}$ |  $\hat{d}$ e $\hat{h}$ são correspondentes. $r // s \Leftrightarrow \hat{d} \cong \hat{h}$ |

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Na figura ao lado, $r // s$. Vamos calcular os valores das medidas dos ângulos *a* e *b*, sabendo que, em graus, $a = 2x + 50°$ e $b = 4x - 30°$.




- Como $r // s$, temos:
  $a = b$ (ângulos correspondentes)
  $2x + 50° = 4x - 30°$
  $2x - 4x = -30° - 50°$
  $-2x = -80°$
  $x = 40°$
- Como $a = 2x + 50°$, temos:
  $a = 2 \cdot (40°) + 50°$
  $a = 80° + 50°$
  $a = 130°$
  Como $b = a$, então $b = 130°$.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** **Dois ângulos correspondentes, determinados por duas retas paralelas, interceptadas por uma transversal, medem $2x + 40°$ e $-3x + 90°$.**

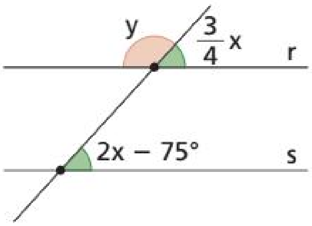
**a)** Determine o valor de *x*.

**b)** Determine a medida de cada um dos ângulos dados.

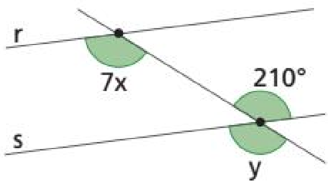
**2.** **Dois ângulos opostos pelo vértice medem $3x - 75°$ e $x + 15°$. Determine o valor de *x*.**

**3.** **Em cada caso, determine o valor de *x* e *y*, sabendo que $r // s$.**

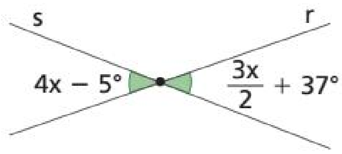
**a)**




**b)**




**4.** **Determine a medida de *x*.**




**5.** **Na figura seguinte, as retas *r* e *s* são paralelas.**

**Qual é, em graus, a medida do ângulo *y*?**

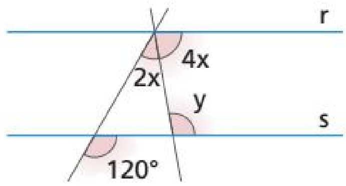
**a)** 100°

**b)** 110°

**c)** 120°

**d)** 130°

**e)** 140°




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**6.** **(UFMA) Dois ângulos opostos pelo vértice medem $3x + 10°$ e $x + 50°$. Um deles mede:**

**a)** 20°

**b)** 70°

**c)** 30°

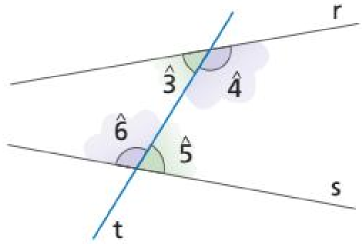
**d)** 80°

**e)** 50°

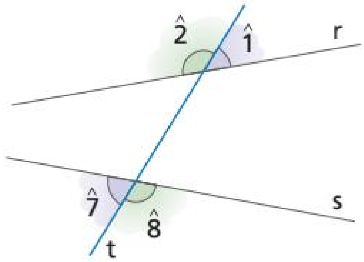
# Ângulos alternos

Ângulos alternos são pares de ângulos não adjacentes que estão em lados opostos em relação à reta transversal.

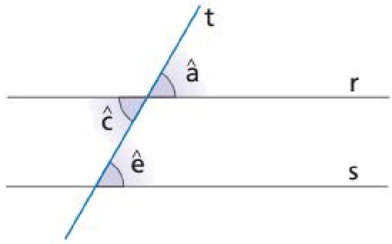
- $\hat{3}$ e $\hat{5}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s* (região interna). Portanto, $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são ângulos alternos internos.
- $\hat{4}$ e $\hat{6}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s*. Então, $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são ângulos alternos internos.




- $\hat{1}$ e $\hat{7}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*. Portanto, $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos alternos externos.
- $\hat{2}$ e $\hat{8}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*. Então, $\hat{2}$ e $\hat{8}$ são ângulos alternos externos.




Considere, agora, as retas *r* e *s*, paralelas, e uma reta transversal *t*. Vamos determinar a relação entre as medidas de dois ângulos alternos (internos ou externos).




(1) $\hat{c} \cong \hat{a}$ (ângulos o.p.v.)

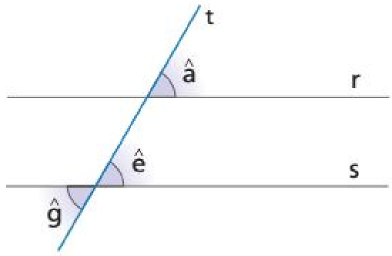
(2) $\hat{a} \cong \hat{e}$ (ângulos correspondentes)

De (1) e (2), obtemos: $\hat{c} \cong \hat{e}$ (ângulos alternos internos congruentes).

(3) $\hat{g} \cong \hat{e}$ (ângulos o.p.v.)

(4) $\hat{e} \cong \hat{a}$ (ângulos correspondentes)

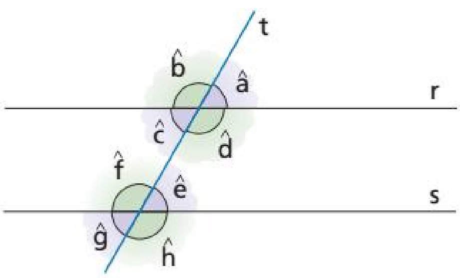
De (3) e (4), obtemos: $\hat{g} \cong \hat{a}$ (ângulos alternos externos congruentes)




### Propriedade

Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam **ângulos alternos congruentes** (**internos ou externos**).

Assim:



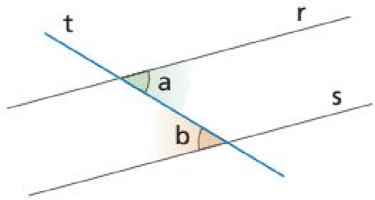

Se r//s, então:

$\left.\begin{array}{l}\hat{c} \cong \hat{e}\\ \hat{d} \cong \hat{f}\end{array}\right\rangle$ alternos internos

$\left.\begin{array}{l}\hat{a} \cong \hat{g}\\ \hat{b} \cong \hat{h}\end{array}\right\rangle$ alternos externos

Usando essa propriedade, podemos resolver a seguinte questão:

Na figura abaixo, $a = 3x - 50°$ e $b = x + 14°$. Qual é a medida, em grau, dos ângulos *a* e *b*, sendo $r // s$?




Como $r // s$, $a = b$ (alternos internos). Então:

$3x - 50° = x + 14°$

$3x - x = 14° + 50°$

$2x = 64°$

$x = 32°$

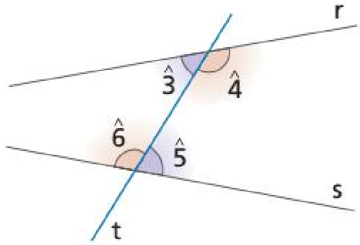
Daí:

$a = 3 \cdot (32°) - 50° = 96° - 50° = 46°$

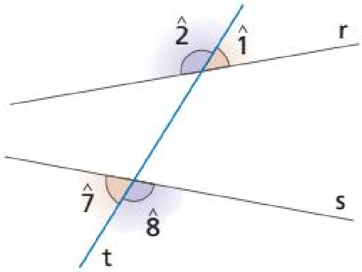
Portanto, $a = 46°$ e $b = 46°$.

# Ângulos colaterais

Ângulos colaterais são pares de ângulos não adjacentes localizados no mesmo lado da reta transversal.




- $\hat{3}$ e $\hat{6}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s* (região interna). Então, $\hat{3}$ e $\hat{6}$ são ângulos colaterais internos.
- $\hat{4}$ e $\hat{5}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s*. Então, $\hat{4}$ e $\hat{5}$ são ângulos colaterais internos.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

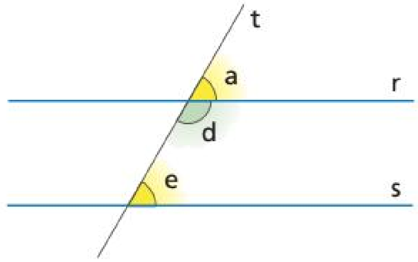
- $\hat{1}$ e $\hat{8}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*. Assim, $\hat{1}$ e $\hat{8}$ são ângulos colaterais externos.
- $\hat{2}$ e $\hat{7}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*. Assim, $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são ângulos colaterais externos.

Voltemos a considerar as retas *r* e *s*, paralelas, e uma reta transversal *t*. Vamos determinar a relação entre as medidas de dois ângulos colaterais (internos ou externos).

(1) Como *d* e *a* são ângulos adjacentes suplementares, temos: d + a = 180°.

(2) Como *a* e *e* são ângulos correspondentes, então: a = e.

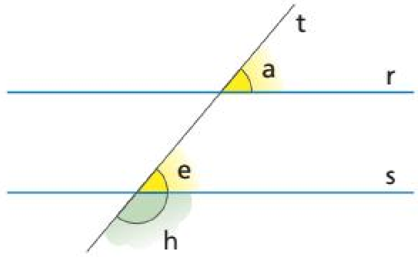
De (1) e (2), obtemos: d + e = 180° (*d* e *e* são ângulos colaterais internos).




(1) Como *h* e *e* são ângulos adjacentes suplementares, temos: h + e = 180°.

(2) Como *e* e *a* são ângulos correspondentes, então: e = a.

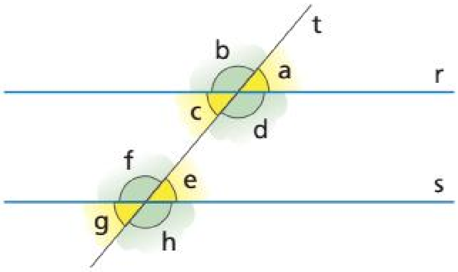
De (1) e (2), obtemos: h + a = 180° (*h* e *a* são ângulos colaterais externos).




## Propriedade

Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam **ângulos colaterais** (**internos ou externos**) **suplementares**.

Assim:



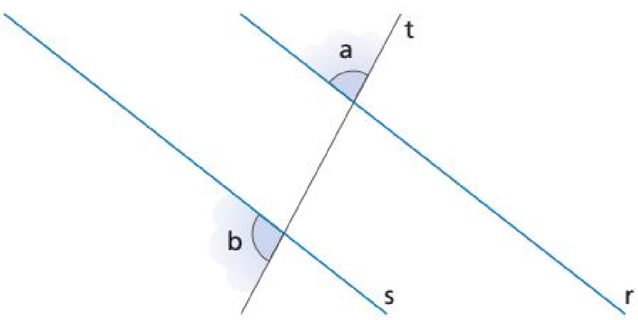

Se r//s, então:

$\left.\begin{array}{l} c + f = 180° \\ d + e = 180° \end{array}\right\rangle$ colaterais internos

$\left.\begin{array}{l} a + h = 180° \\ b + g = 180° \end{array}\right\rangle$ colaterais externos

Usando essa propriedade, vamos considerar o seguinte problema:

Na figura a seguir, temos r//s. Vamos calcular, em grau, as medidas dos ângulos *a* e *b*, sabendo que a = 2x e b = 3x − 20°.




Como r//s, temos:

a + b = 180° (colaterais externos)

2x + 3x − 20° = 180°

5x = 180° + 20°

5x = 200°

x = 40°

Como a = 2x, vem:

a = 2 · (40°) = 80°

Mas como a + b = 180°, então:

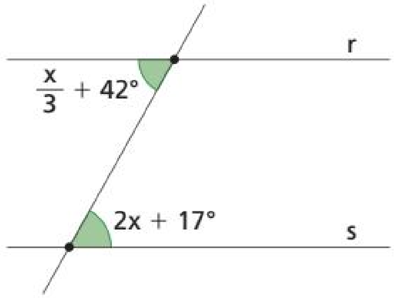
b = 180° − 80° = 100°

Portanto, a = 80° e b = 100°.

# ATIVIDADES

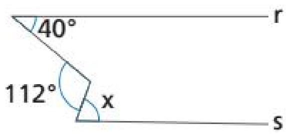
Responda às questões no caderno.

**1.** Na figura abaixo, determine o valor de *x*, sabendo que r//s.



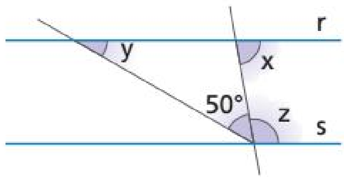

**2.** (Unimontes-MG) Se r//s, então o valor de *x*, na figura abaixo, é:

**a)** 52°
**b)** 68°
**c)** 72°
**d)** 58°

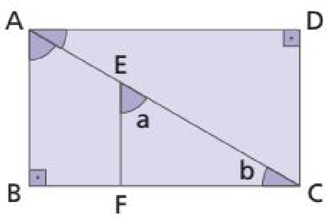



**3.** As retas *r* e *s* da figura são paralelas. Sabendo que x + 2y + 2z = 340°, qual é o valor, em graus, de *y*?

**a)** 30°
**b)** 35°
**c)** 40°
**d)** 45°
**e)** 50°




**4.** Na figura, ABCD é um retângulo e $\overline{EF}//\overline{AB}$. A medida de $D\hat{A}C$ é a metade da medida de $B\hat{A}C$.



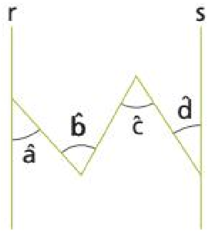

Determine, em grau, o valor de a − b.

**a)** 10°
**b)** 20°
**c)** 30°
**d)** 45°
**e)** 50°

**5.** Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas. O ângulo *a* mede 42°, o ângulo *b* mede 71°, e o ângulo *d* mede 33°.

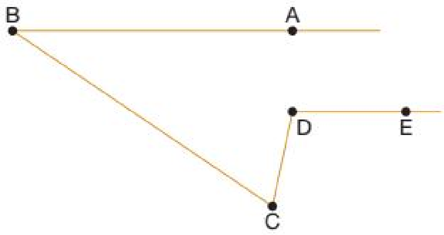
Determine, em grau, a medida do ângulo *c*.

**a)** 71°
**b)** 42°
**c)** 73°
**d)** 33°
**e)** 62°



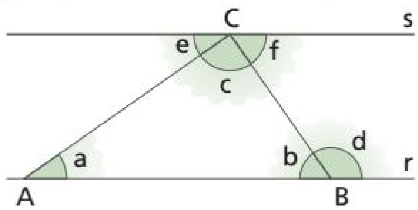

**6.** Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Sendo med($B\hat{C}D$) = 68° e med($A\hat{B}C$) = 34°, calcule a med($C\hat{D}E$).

**a)** 112°
**b)** 102°
**c)** 78°
**d)** 68°
**e)** 46°




**7.** Junte-se a um colega e resolvam a situação a seguir:

Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Sabendo que a = 2x + 5°, d = 9x − 10°, f = 3x + 10°, determinem:

**a)** *x*;
**b)** *a* e *b*;
**c)** a + b + c.

Agora, respondam:

**d)** Como vocês classificariam os ângulos BAC, ABC e ACB quanto às suas medidas?

**e)** De acordo com a soma de suas medidas, como são chamados os ângulos BAC e ABC?

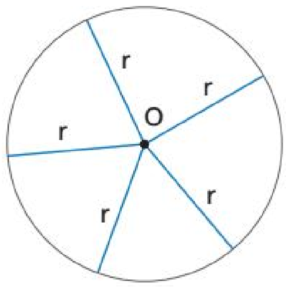
CAPÍTULO 2

# CIRCUNFERÊNCIA

Não é a primeira vez que falamos sobre a circunferência – figura fundamental em numerosas construções geométricas.

E você também já aprendeu a traçar a figura de uma circunferência usando o compasso.

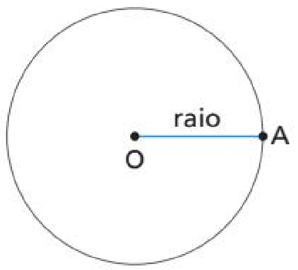
> **Circunferência** é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo desse plano.



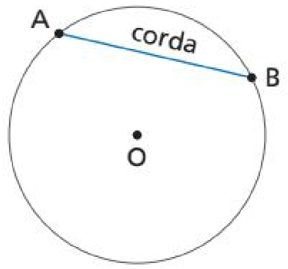

Esse ponto fixo é chamado **centro da circunferência** (ponto *O*).

A distância constante é o comprimento do raio, indicado por *r*.

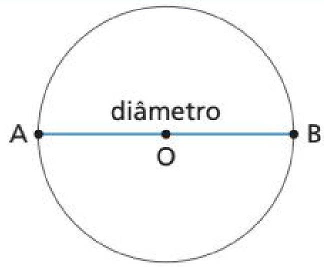
Observe, nas figuras a seguir, alguns elementos de uma circunferência:




Qualquer segmento que une o centro a um ponto da circunferência chama-se **raio**.



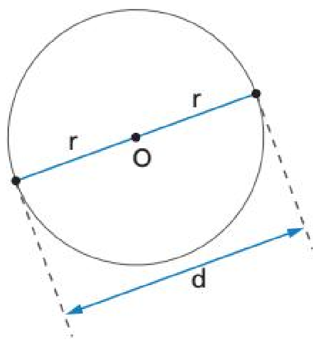

Qualquer segmento que une dois pontos distintos da circunferência chama-se **corda**.




A corda que passa pelo centro da circunferência chama-se **diâmetro**. O diâmetro é a maior corda da circunferência.

Note que a medida do diâmetro (*d*) é igual ao dobro da medida *r* do raio, ou seja:

$$d = 2r$$

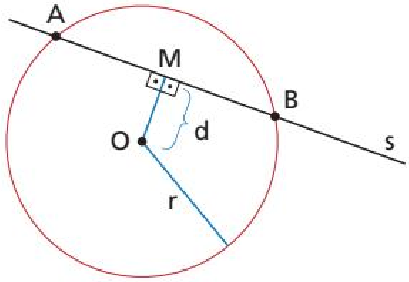



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

# Posições relativas de uma reta e uma circunferência

Vamos, agora, estudar as posições que uma reta pode ocupar em relação a uma circunferência.

## Reta secante

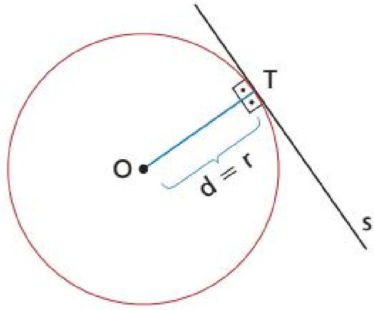



A reta *s* corta a circunferência em dois pontos distintos.

Nesse caso, *s* é chamada **reta secante** à circunferência.

Note que a distância *d* do centro à reta *s* é menor que o comprimento *r* do raio, ou seja, $\mathbf{d} < \mathbf{r}$.

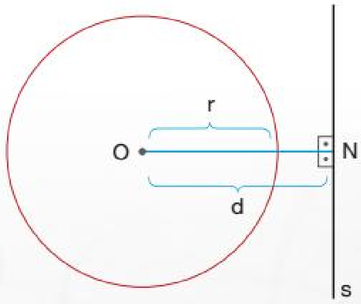
## Reta tangente




A reta *s* tem apenas um ponto em comum com a circunferência, o ponto *T*, que é chamado **ponto de tangência.**

Nesse caso, *s* é chamada **reta tangente** à circunferência. Note que a distância *d* do centro à reta *s* é igual ao comprimento *r* do raio, ou seja, $\mathbf{d} = \mathbf{r}$.

## Reta externa




A reta *s* e a circunferência não têm ponto em comum.

Nesse caso, a reta *s* é uma **reta externa** à circunferência. Note que a distância *d* do centro à reta *s* é maior que o comprimento *r* do raio, ou seja, $\mathbf{d} > \mathbf{r}$.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

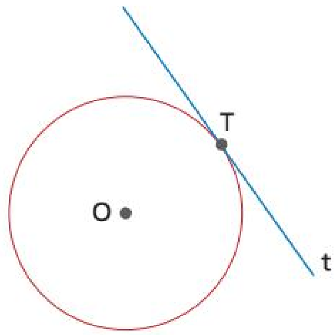
KUCHER SERHII/SHUTTERSTOCK.COM

## Propriedades da reta tangente

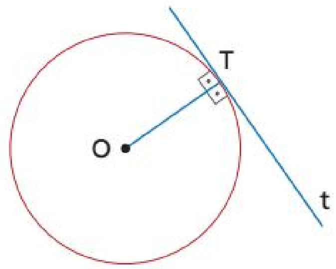
As retas tangentes a uma circunferência apresentam duas propriedades importantes.

**1ª propriedade:**

Na figura, vemos uma circunferência de centro *O* e uma reta *t*, tangente a essa circunferência.



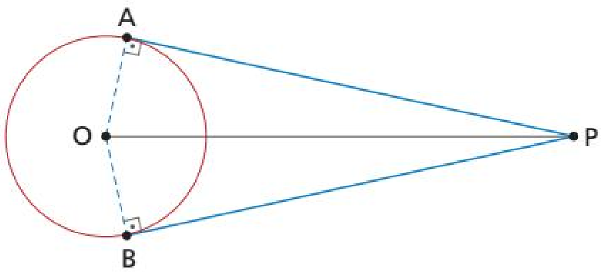

A menor distância do ponto *O* à reta *t* é o segmento OT, perpendicular à reta *t*. Como o ponto *T* pertence à circunferência, $\overline{OT}$ representa um raio dessa circunferência.




> Qualquer reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência: $t \perp \overline{OT}$.

**2ª propriedade:**

A figura nos mostra dois segmentos, PA e PB, tangentes à circunferência, traçados de um ponto *P* exterior.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Se considerarmos os triângulos retângulos OAP e OBP, podemos afirmar que são congruentes, pois têm a hipotenusa ($\overline{OP}$ nos dois triângulos) e um cateto ($\overline{OA}$ no $\triangle OAP$ e $\overline{OB}$ no $\triangle OBP$) respectivamente congruentes.

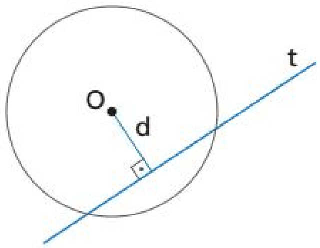
Se $\triangle OAP \cong \triangle OBP$, então $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

> Se de um ponto *P*, exterior a uma circunferência, traçamos os segmentos PA e PB tangentes à circunferência nos pontos *A* e *B*, então os segmentos PA e PB são congruentes.

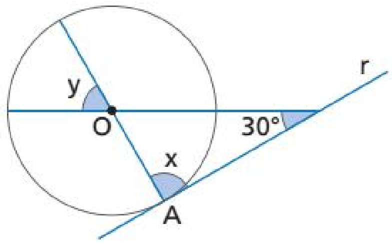
# ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

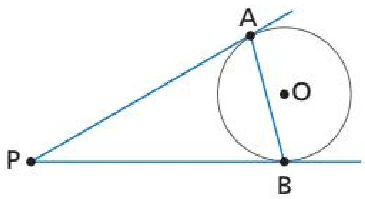
**1.** Uma reta *t* é secante a uma circunferência de centro *O* e 10 cm de raio. Indicando por *d* a distância do ponto *O* à reta *t*, qual é o maior valor inteiro que *d* pode assumir?



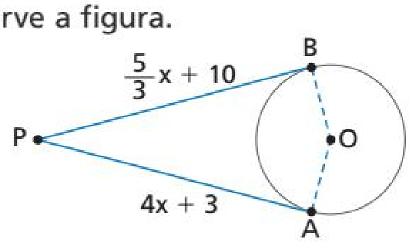

**2.** Na figura, a reta *r* é tangente à circunferência. Determine, em grau, as medidas *x* e *y*.




**3.** Na figura, a medida do segmento PA é expressa por *x*, e a medida do segmento AB é expressa por *y*. Qual é o polinômio que expressa o perímetro do triângulo PAB?




**4.** Observe a figura.




Determine:

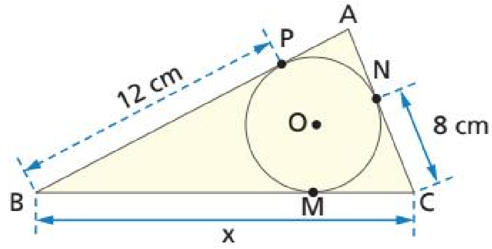
**a)** a medida *x*;

**b)** a medida do segmento PA;

**c)** a medida do segmento PB;

**d)** o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm.

**5.** Observe a figura.

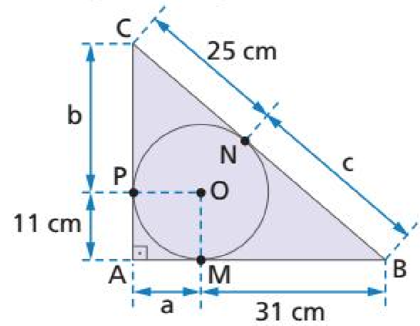



Determine a medida:

**a)** *x* do lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC;

**b)** do segmento AN, caso o perímetro do △ABC seja 46 cm.

**6.** Observe a figura a seguir.

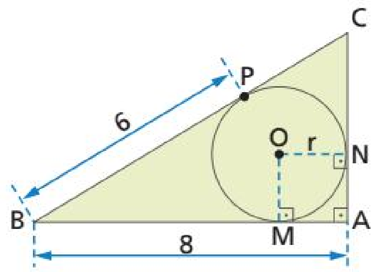



Determine:

**a)** as medidas *a*, *b* e *c* indicadas na figura;

**b)** o perímetro do triângulo ABC.

**7.** Considerando a figura, determine:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** o comprimento *r* do raio da circunferência;

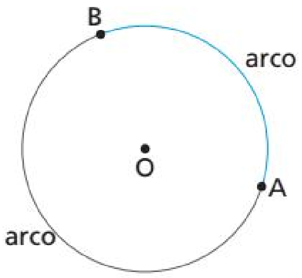
**b)** o perímetro do quadrado ANOM;

**c)** a expressão algébrica que representa o perímetro do △ABC, se a medida do segmento PC é dada por *a*;

**d)** o perímetro do quadrilátero BMOP.

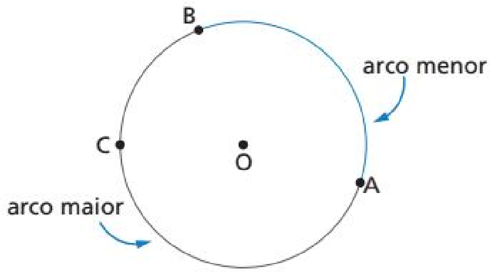
# Arco de circunferência e ângulo central

Na circunferência representada abaixo, estão assinalados os pontos $A$ e $B$, distintos.



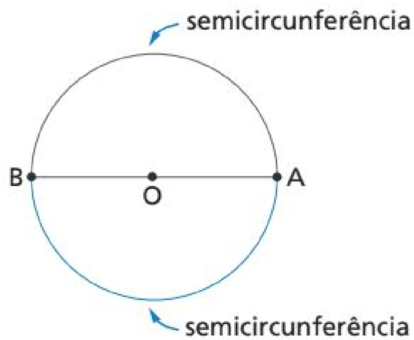

Esses pontos dividem a circunferência em duas partes e cada uma dessas partes é chamada **arco de circunferência**.

Os pontos $A$ e $B$ são chamados **extremidades** do arco. O arco menor é indicado por $\overset{\frown}{AB}$ e, para indicar o arco maior $\overset{\frown}{AB}$, tomamos mais um ponto desse arco, por exemplo, o ponto $C$.

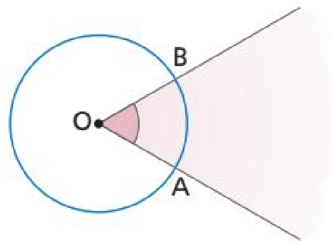



Assim, representamos o arco menor por $\overset{\frown}{AB}$ e o arco maior por $\overset{\frown}{ACB}$.

Quando as extremidades do arco são extremidades de um mesmo diâmetro, cada um dos arcos denomina-se **semicircunferência**.




Qualquer ângulo que tenha o vértice no centro de uma circunferência é denominado **ângulo central**. Nesta figura, $A\hat{O}B$ é o ângulo central.



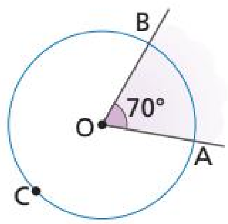

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Quando traçamos um ângulo central, ele determina um arco na circunferência cuja medida pode ser dada em grau.

Na figura, $\overset{\frown}{AB}$ é o arco determinado na circunferência pelos lados do ângulo central $A\hat{O}B$.

Também temos que:

- a medida do arco menor $\overset{\frown}{AB}$ é 70°, pois o ângulo central $A\hat{O}B$ mede 70°;
- a medida do arco $\overset{\frown}{ACB}$ é 290° (360° − 70°).



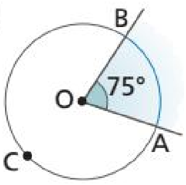
Como os ângulos centrais que consideraremos serão sempre medidos em grau, podemos dizer que:

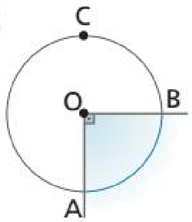
- a medida do arco menor, em grau, é igual à medida do ângulo central cujos lados passam pelas extremidades do arco;
- a medida do arco maior, em grau, é igual à diferença entre 360° (ângulo de uma volta) e a medida do arco menor.

## ATIVIDADES

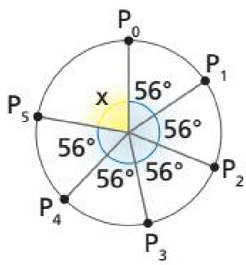
Responda às questões no caderno.

**1.** Em cada uma das figuras, dê a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ e a do arco $\overset{\frown}{ACB}$:

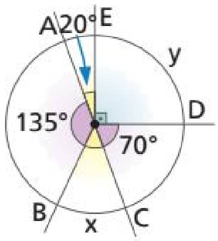
a) 


b) 

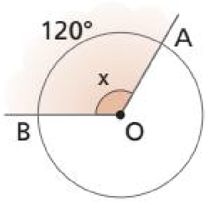

**2.** Observando a figura, dê o valor da medida *x*.

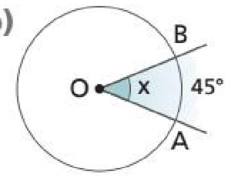



**3.** Na figura ao lado, calcule o valor de *x* (medida do arco $\overset{\frown}{BC}$) e o valor de *y* (medida do arco $\overset{\frown}{DE}$).

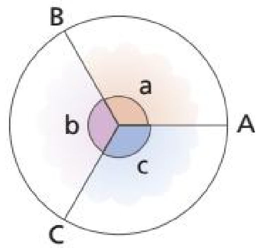



**4.** Em cada uma das figuras a seguir, calcule a medida *x* do ângulo central associado ao arco menor $\overset{\frown}{AB}$.

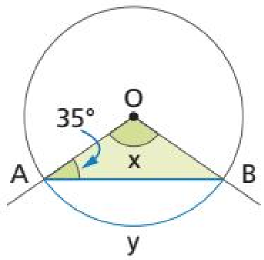
a) 


b) 

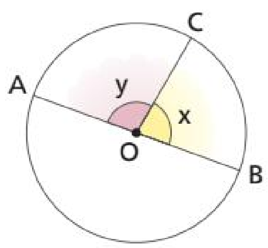

**5.** Na figura, temos que a = b = c, em que *a*, *b* e *c* são as medidas dos ângulos centrais associados a cada arco. Determine a medida dos arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CA}$.



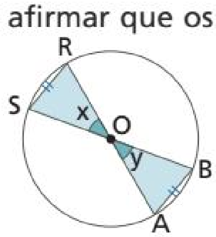

**6.** Sabendo que o triângulo OAB da figura é isósceles, determine a medida *x* do ângulo central AÔB e a medida *y* do arco $\overset{\frown}{AB}$ associado a esse ângulo central.




**7.** Sabendo que o arco $\overset{\frown}{BC}$ mede 80°, calcule o valor da expressão y − x.




**8.** Na figura a seguir, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{RS}$ são congruentes. Você pode afirmar que os triângulos AOB e ROS são congruentes? Em caso afirmativo, que caso de congruência justifica sua resposta?

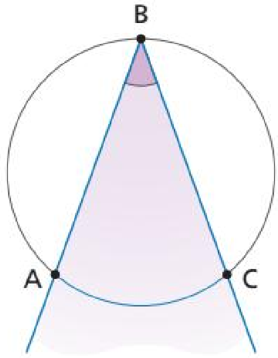



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

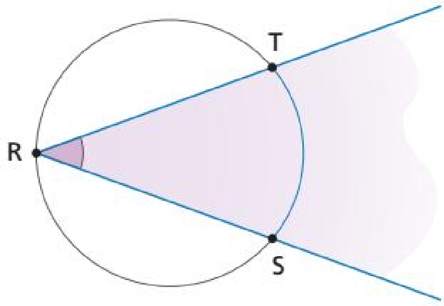
# Ângulo inscrito

> **Ângulo inscrito** é todo ângulo que tem o vértice na circunferência e seus lados secantes a ela.

Na figura, $A\hat{B}C$ é um ângulo inscrito. Ele determina na circunferência o arco $\widehat{AC}$.

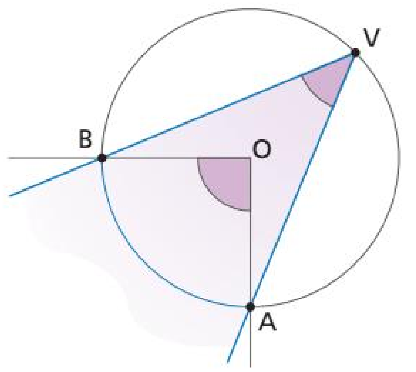



Na figura, $S\hat{R}T$ é um ângulo inscrito. Ele determina na circunferência o arco $\widehat{ST}$.




A todo ângulo inscrito corresponde um ângulo central, que determina na circunferência o mesmo arco determinado pelo ângulo inscrito.

Nesta figura abaixo, temos:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $A\hat{V}B$ é um ângulo inscrito.
- $A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente.
- Ambos determinam o mesmo arco $\widehat{AB}$.

Existe uma relação entre a medida de um ângulo inscrito e a medida do ângulo central correspondente:

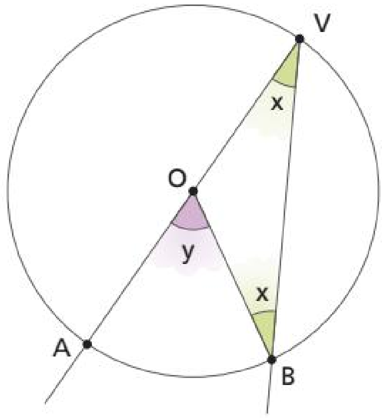
> A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

Vamos demonstrar essa relação considerando três casos.

**1º caso:** O centro *O* pertence a um dos lados do ângulo inscrito.

Na figura:

- *x* é a medida do ângulo inscrito;
- *y* é a medida do ângulo central correspondente.



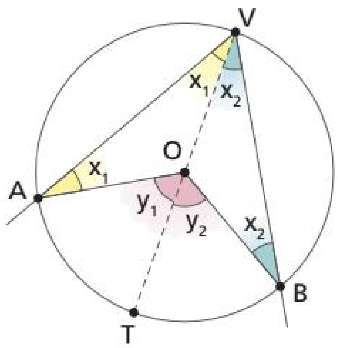

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Note que o triângulo OBV é isósceles, pois $\overline{OB} \cong \overline{OV}$ e $\overline{VB}$ é a base. Portanto, os ângulos da base medem *x*.

Como *y* representa a medida do ângulo externo do triângulo OBV, temos:

$$y = x + x \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \mathbf{x = \frac{y}{2}}$$

**2º caso:** O centro *O* é interno ao ângulo inscrito.




Vamos, novamente, indicar por:

- *x* a medida do ângulo inscrito;
- *y* a medida do ângulo central correspondente.

Traçando, pelo vértice V, um diâmetro da circunferência, dividimos o ângulo inscrito em dois ângulos de medidas $x_1$ e $x_2$ $(x_1 + x_2 = x)$ e o ângulo central correspondente em dois ângulos de medidas $y_1$ e $y_2$ $(y_1 + y_2 = y)$.

De acordo com o 1º caso, temos:

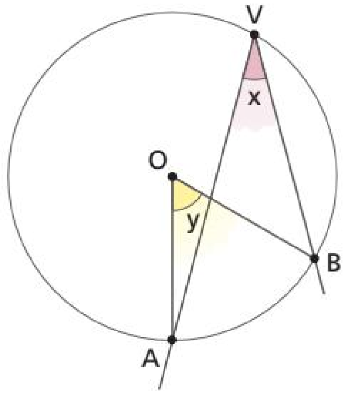
- $y_1 = 2x_1$ (considerando o triângulo AOV);
- $y_2 = 2x_2$ (considerando o triângulo BOV).

Adicionando membro a membro, temos:

$$y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 \Rightarrow \underbrace{y_1 + y_2}_{y} = 2\underbrace{(x_1 + x_2)}_{x} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow 2x = y \Rightarrow \mathbf{x = \frac{y}{2}}$$

**3º caso:** O centro *O* é externo ao ângulo inscrito.

Denominando *x* a medida do ângulo inscrito e *y* a medida do ângulo central correspondente, é possível demonstrar, de acordo com a figura abaixo, que é válida a relação $x = \dfrac{y}{2}$.




Como o ângulo central tem a mesma medida do arco determinado por ele na circunferência, existe uma relação entre a medida do ângulo inscrito e a medida do arco correspondente.

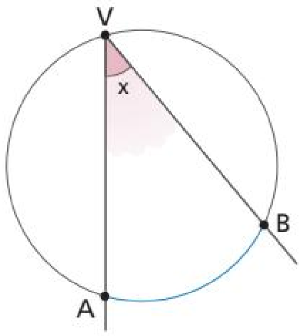
> A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco determinado por ele na circunferência.

Na figura seguinte, temos:

- *x* é a medida do ângulo inscrito $A\hat{V}B$;
- $\widehat{AB}$ é o arco determinado pelo ângulo inscrito $A\hat{V}B$.

Então:

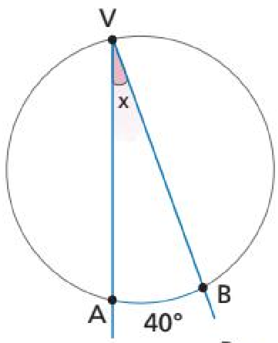
$$x = \frac{\text{medida do arco } \widehat{AB}}{2}$$




Acompanhe algumas situações sobre ângulos inscritos.

**1** Vamos determinar a medida *x* do ângulo inscrito $A\hat{V}B$ na figura ao lado.
Como a medida do arco $\widehat{AB}$ é 40°, temos:

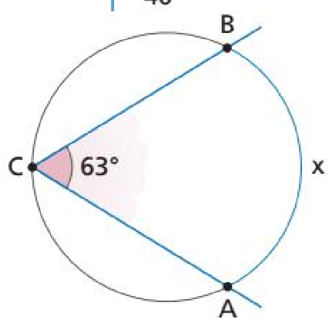
$$x = \frac{\text{medida do arco } \widehat{AB}}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$$




**2** Na figura ao lado, *x* é a medida do arco $\widehat{AB}$, associado ao ângulo inscrito $A\hat{C}B$. Vamos determinar o valor de *x*.
De acordo com os dados da figura, temos:

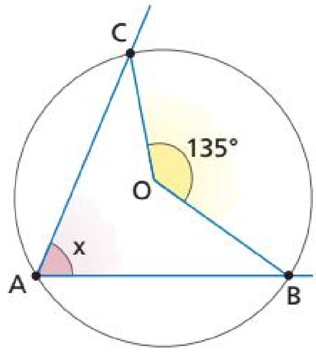
- *x*: medida do arco $\widehat{AB}$;
- 63°: medida do ângulo inscrito $A\hat{C}B$.

Então: $63° = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \cdot 63° \Rightarrow x = 126°$




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

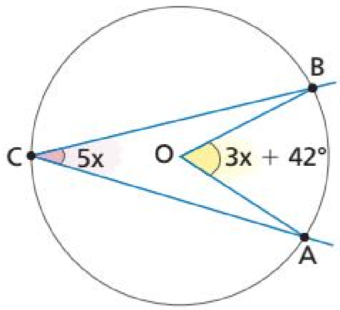
**3** Considerando a figura abaixo, vamos determinar o valor da medida *x*. De acordo com a figura:




- *x*: medida do ângulo inscrito $B\hat{A}C$;
- 135°: medida do ângulo central $B\hat{O}C$, correspondente ao ângulo inscrito $B\hat{A}C$.

Então: $x = \dfrac{135°}{2} = 67°\ 30'$

**4** Vamos encontrar o valor da medida *x* na figura abaixo.




De acordo com a figura, o ângulo $A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $A\hat{C}B$. Então:

$$5x = \frac{3x + 42°}{2} \Rightarrow \frac{10x}{2} = \frac{3x + 42°}{2}$$

$$10x = 3x + 42° \Rightarrow 10x - 3x = 42°$$

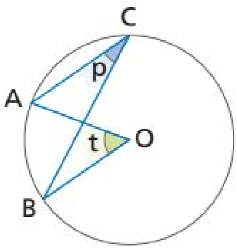
$$7x = 42° \Rightarrow x = \frac{42°}{7}$$

$$x = 6°$$

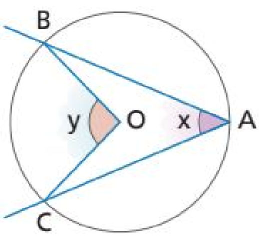
## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

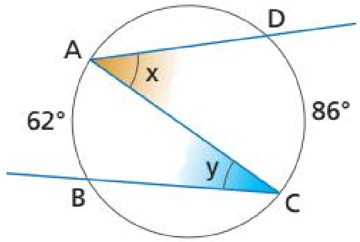
**1.** Qual é a relação de igualdade entre as medidas dos ângulos *p* e *t* indicados na figura?



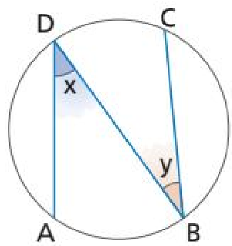

**2.** A medida do arco $\overset{\frown}{BC}$ é 92°. Determine as medidas *x* e *y* indicadas na figura.




**3.** Considerando a figura abaixo, calcule o valor da expressão x − y.

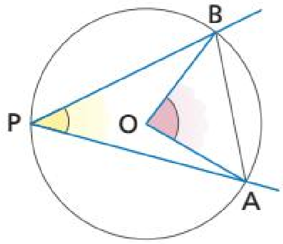



**4.** A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ corresponde a $\dfrac{1}{5}$ da medida da circunferência, em grau, enquanto a medida do arco $\overset{\frown}{CD}$ corresponde a $\dfrac{1}{6}$ da medida da circunferência em grau. Determine as medidas *x* e *y* indicadas na figura.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

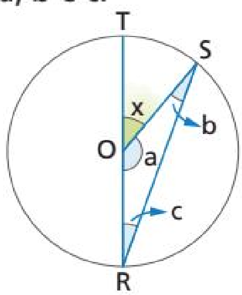
**5.** Na circunferência da figura abaixo, a corda AB determina na circunferência um arco que mede 82°.



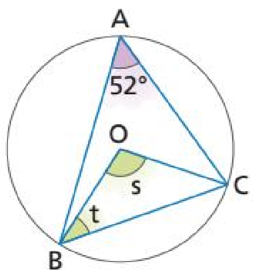

Sabendo que *O* é o centro e *P* um ponto qualquer da circunferência, determine a medida do ângulo:

**a)** AOB; **b)** APB.

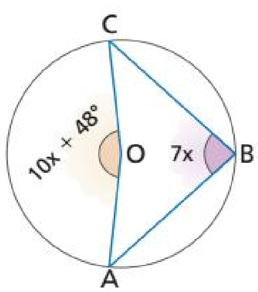
**6.** Sabendo que $\overset{\frown}{RS}$ mede 140°, calcule o valor de *x*, *a*, *b* e *c*.



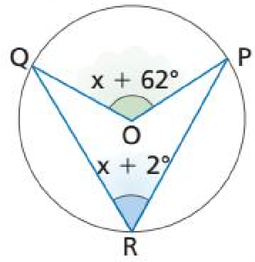

**7.** Observando a circunferência da figura, determine as medidas *s* e *t* indicadas.



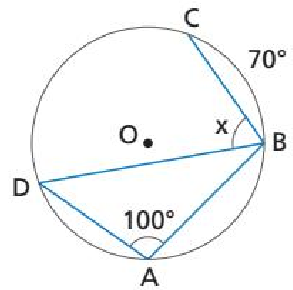

**8.** Dada a circunferência a seguir, determine as medidas dos ângulos AOC e ABC.



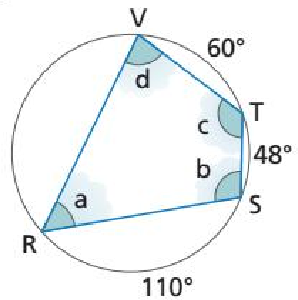

**9.** Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir?




**10.** Observando esta figura, determine a medida do arco $\overset{\frown}{CD}$ e a medida *x* do ângulo DBC.



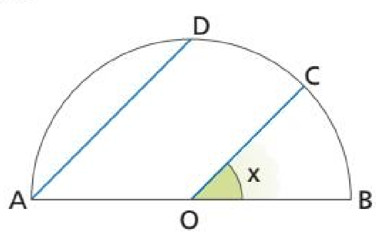

**11.** Determine as medidas *a*, *b*, *c* e *d*, indicadas na figura.




**12.** Em uma circunferência, med($\overset{\frown}{AB}$) = 2x, med($\overset{\frown}{BC}$) = 3x, med($\overset{\frown}{CD}$) = x + 3 e med($\overset{\frown}{DA}$) = x + 50°. Determine a medida do ângulo inscrito:

**a)** $B\hat{A}C$; **b)** $B\hat{C}D$.

**13.** Em uma semicircunferência de centro *O* e diâmetro $\overline{AB}$, $\overline{OC}//\overline{AD}$ e med($\overset{\frown}{CD}$) = 45°. Determine a medida *x* indicada na figura.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

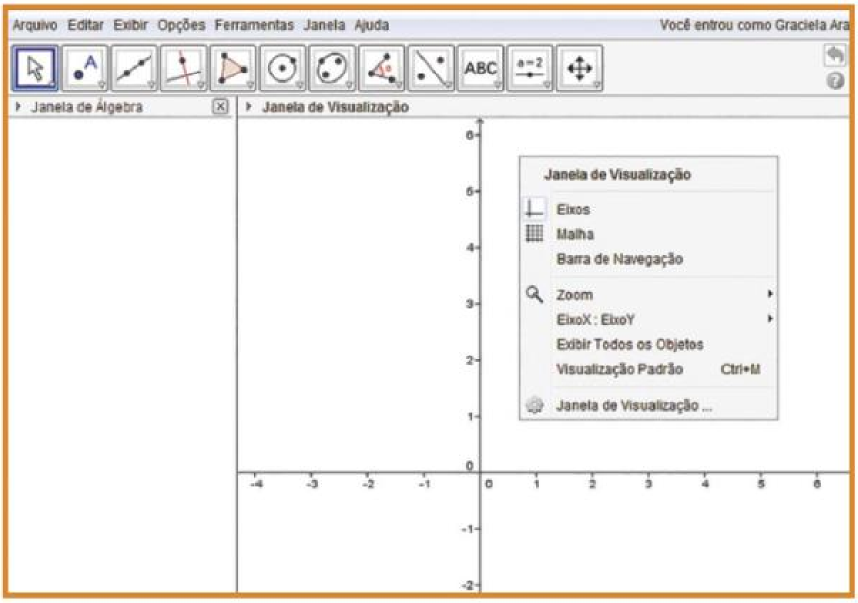
TECNOLOGIAS

## Ângulo inscrito e ângulo central

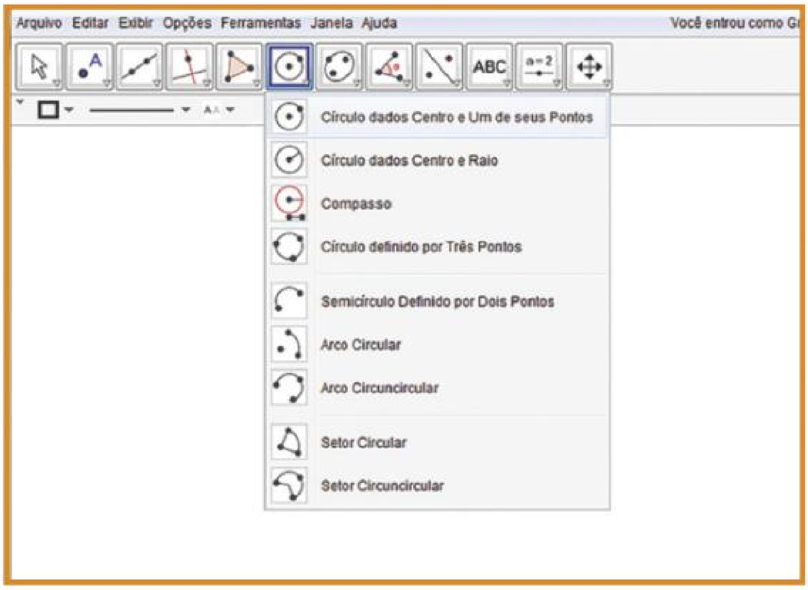
Nesta seção, utilizaremos o GeoGebra para verificar a relação entre o ângulo inscrito e o ângulo central de uma circunferência.

Vamos lá? Siga as instruções.

**1** Abra o programa e, com o botão direito do *mouse*, oculte os eixos. Depois, feche a **Janela de Álgebra**.

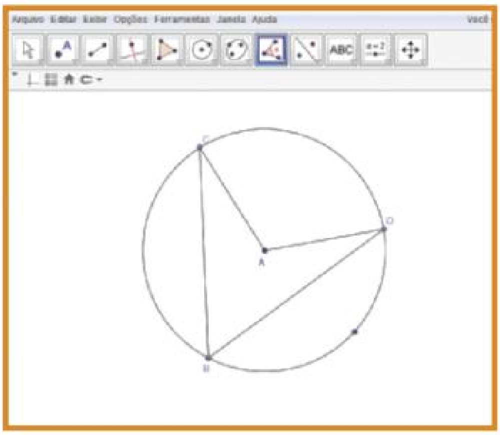



**2** O próximo passo é construir uma circunferência. Para isso, basta selecionar a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**.

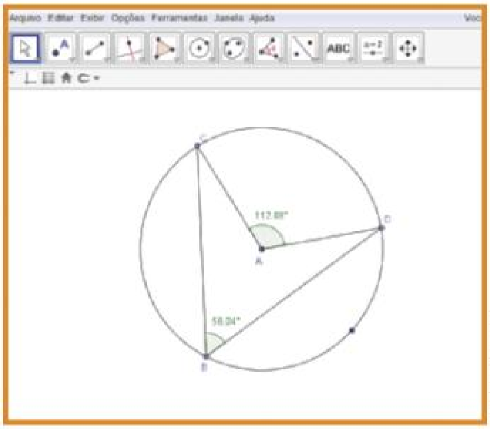



FOTOS: GEOGEBRA

**3** Utilizando os conhecimentos sobre os objetos matemáticos, construa um ângulo central e um ângulo inscrito. Para realizar esse procedimento, marcamos dois pontos na circunferência, denominados *C* e *D*. Após esse procedimento, construímos os segmentos de reta AD, AC, DB e BC.



**4** Por fim, construa os ângulos central e inscrito. Para isso, basta clicar na ferramenta **Ângulo** e construir os ângulos DAC e DBC.



FOTOS: GEOGEBRA

Agora, movimente os ângulos inscrito e central, modificando as medidas. Copie o quadro em seu caderno e anote essas medidas.

| Ângulo inscrito | Ângulo central |
|---|---|
| | |
| | |
| | |

Agora, é sua vez:

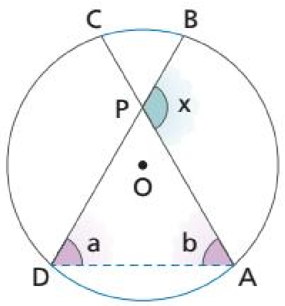
**1.** Analise o quadro que você preencheu. O que é possível concluir?

**2.** Organizados em trios, escolham um dos exercícios da Unidade para resolver utilizando as orientações desta seção com o *software* GeoGebra. Após resolvê-lo, cada trio deverá propor um desafio de modificação para outros trios resolverem.

# Ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência

Vamos analisar dois casos de ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência, e que não são ângulos centrais.

**1º caso:** O vértice é um ponto interno à circunferência, distinto do centro.




Como *x* é a medida de um ângulo externo ao triângulo APD, temos que x = a + b.

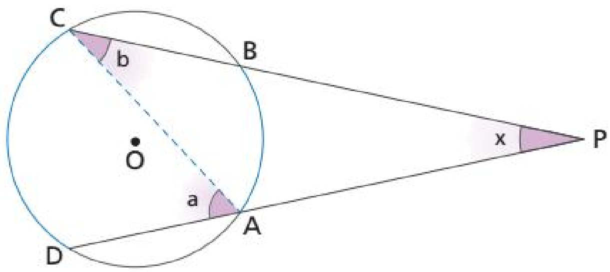
Note que:

$$a = \frac{med(\widehat{AB})}{2} \text{ e } b = \frac{med(\widehat{CD})}{2}$$

Então, podemos escrever:

$$x = \frac{med(\widehat{AB})}{2} + \frac{med(\widehat{CD})}{2}$$

**2º caso:** O vértice é um ponto externo à circunferência.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como *a* é a medida de um ângulo externo ao triângulo APC, temos:

$a = x + b \Rightarrow x = a - b$

Mas:

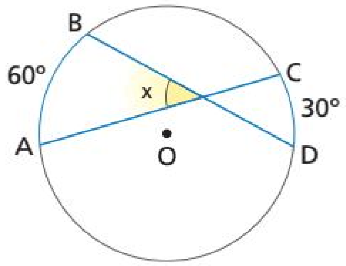
$$a = \frac{med(\widehat{CD})}{2} \text{ e } b = \frac{med(\widehat{AB})}{2}$$

Então:

$$x = \frac{med(\widehat{CD})}{2} - \frac{med(\widehat{AB})}{2}$$

Acompanhe as seguintes situações.

**1** Vamos determinar a medida $x$ indicada na figura, dados $med(\overset{\frown}{AB}) = 60°$ e $med(\overset{\frown}{CD}) = 30°$.

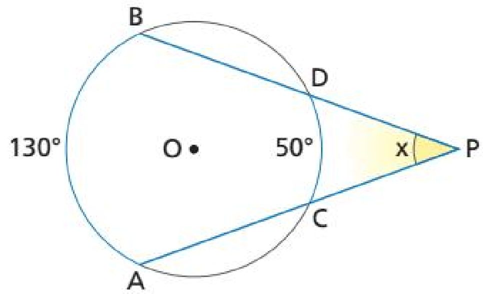



$$x = \frac{med(\overset{\frown}{AB})}{2} + \frac{med(\overset{\frown}{CD})}{2}$$

$$x = \frac{60°}{2} + \frac{30°}{2}$$

$$x = 45°$$

**2** Vamos determinar a medida $x$ indicada na figura, dados $med(\overset{\frown}{AB}) = 130°$ e $med(\overset{\frown}{CD}) = 50°$.




$$x = \frac{med(\overset{\frown}{AB})}{2} - \frac{med(\overset{\frown}{CD})}{2}$$

$$x = \frac{130°}{2} - \frac{50°}{2}$$

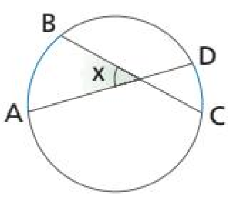
$$x = 40°$$

## ATIVIDADES

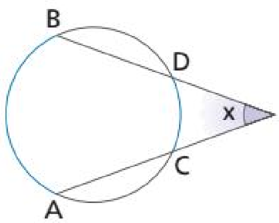
Responda às questões no caderno.

**1.** Em cada uma das figuras, vamos indicar por $t$ a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ e por $s$ a medida do arco $\overset{\frown}{CD}$. Determine a medida $x$, em função de $t$ e $s$.

**a)**

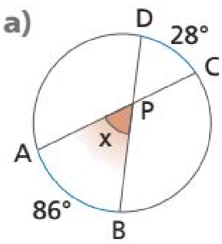



**b)**

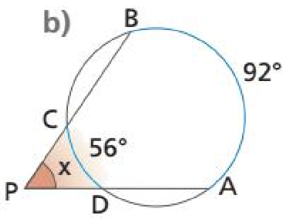



**2.** Determine a medida $x$ em cada uma das figuras:

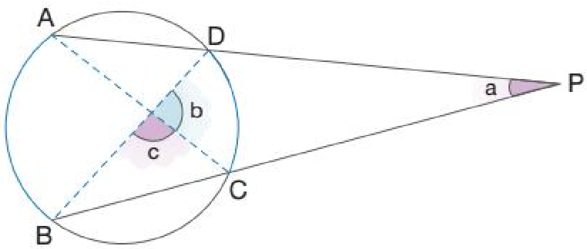
**a)**



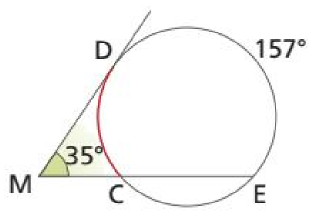

**b)**




**3.** Determine as medidas $a$, $b$ e $c$ indicadas na figura, sabendo que a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 125° e a medida do arco $\overset{\frown}{CD}$ é 65°.



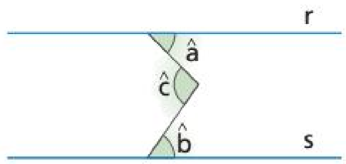

**4.** Quanto mede o arco $\overset{\frown}{CD}$ destacado na figura?



# RETOMANDO O QUE APRENDEU

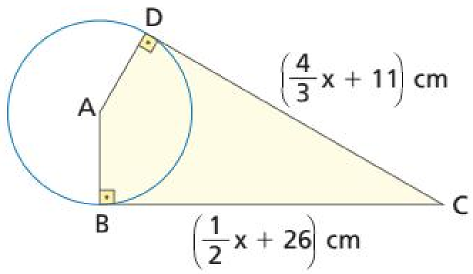
Responda às questões no caderno.

**1.** Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas. O ângulo *a* mede 60°, e o ângulo *b* mede 80°. Qual é a medida, em grau, do ângulo *c*?




**a)** 10°
**b)** 55°
**c)** 140°
**d)** 45°
**e)** 50°

**2.** A medida do diâmetro da circunferência a seguir é de 40 cm.

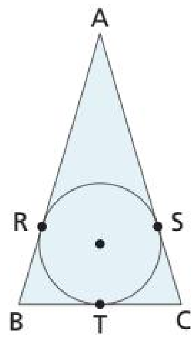



Calcule o perímetro do quadrilátero ABCD.

**a)** 110 cm
**b)** 112 cm
**c)** 115 cm
**d)** 120 cm
**e)** 122 cm

**3.** O triângulo ABC abaixo é isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\overline{RB} \cong \overline{BT} \cong \overline{TC} \cong \overline{CS}$.

Sabendo que $med(\overline{AS}) = a$ e $med(\overline{SC}) = b$, qual é o polinômio que expressa o perímetro do triângulo ABC?



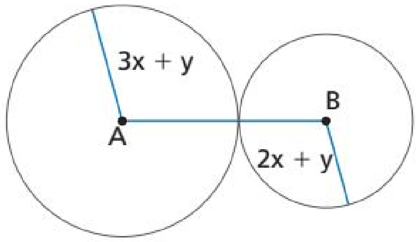

**a)** $2a + 2b$
**b)** $4a + 2b$
**c)** $2a + 4b$
**d)** $4a + 4b$
**e)** n.r.a.

**4.** Em uma circunferência, a medida do raio, em metro, corresponde à solução da equação $\frac{1}{3} - 3x = -\frac{2}{3} + x$. Então, o diâmetro dessa circunferência vale:

**a)** 10 m
**b)** 0,25 m
**c)** 0,5 m
**d)** 0,05 m
**e)** 2 m

**5.** A distância do ponto *A* ao ponto *B* na figura a seguir é 29 cm.

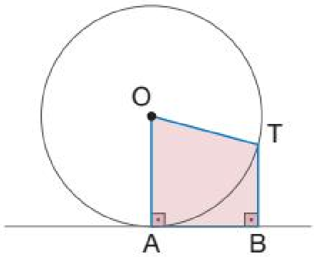
Sabendo que $x - y = 6{,}5$, qual é o valor de *y*?




**a)** 7
**b)** 6,5
**c)** 4
**d)** 3,5
**e)** −0,5

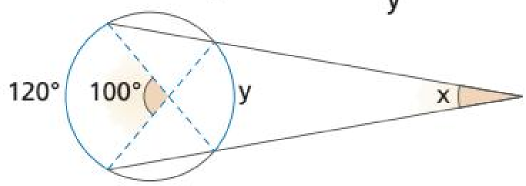
**6.** Na figura, o arco $\overset{\frown}{AT}$ mede 75°.

Quanto mede o ângulo obtuso OTB?




**a)** 95°
**b)** 105°
**c)** 110°
**d)** 115°
**e)** 125°

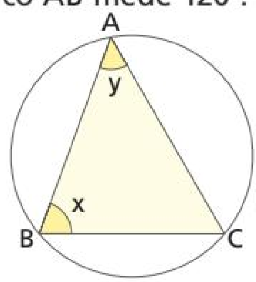
**7.** Considerando os dados da figura abaixo, podemos dizer que a razão $\frac{x}{y}$ vale:




**a)** 0,5
**b)** 0,75
**c)** 0,25
**d)** 2
**e)** 4

**8.** Na figura abaixo, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 120°.

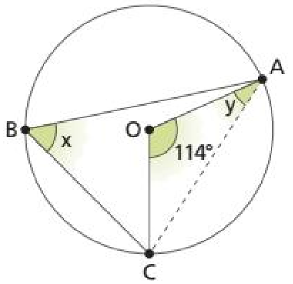
Se $x = 2y$, qual é o valor da expressão $x - y$?




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

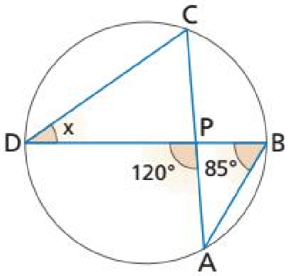
**a)** 30°
**b)** 40°
**c)** 42°
**d)** 45°
**e)** 50°

**9.** Considerando a figura abaixo, pode-se afirmar que x − y vale:



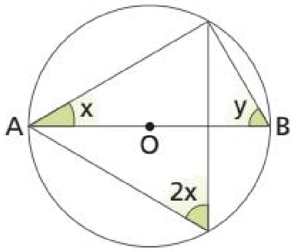

**a)** 24° **c)** 31° **e)** 36°
**b)** 28° **d)** 33°

**10.** Qual é o valor da medida *x* indicada na figura?




**a)** 75° **c)** 55° **e)** 35°
**b)** 65° **d)** 45°

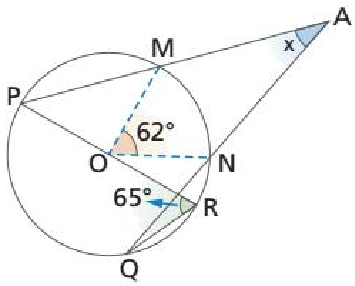
**11.** Na figura a seguir, $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência.




Qual é o valor, em graus, da medida *y*?

**a)** 70° **c)** 60° **e)** 48°
**b)** 64° **d)** 58°

**12.** Qual é o valor da medida *x* indicada na figura?




**a)** 54° **c)** 38° **e)** 28°
**b)** 46° **d)** 34°

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

## UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos ângulos e circunferência. Foram abordados os ângulos determinados por retas transversais, os ângulos correspondentes, os ângulos alternos, os ângulos colaterais, as propriedades de uma circunferência, as posições relativas de uma reta e uma circunferência, as posições relativas de duas circunferências, os arcos de circunferência e os ângulos centrais, o ângulo inscrito em uma circunferência e os ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência.

Devido à série de conteúdos abordados nesta Unidade, sugerimos a você que realize um fichamento dos conteúdos expostos, fazendo registros gráficos (desenhos), exemplos e lembretes. Na abertura, foi apresentada uma aplicação da circunferência e do círculo na Arte.

Como você entende que as propriedades que estudamos possam fazer parte de um objeto artístico que utilize esses conceitos?

Vamos agora refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda às questões no caderno.

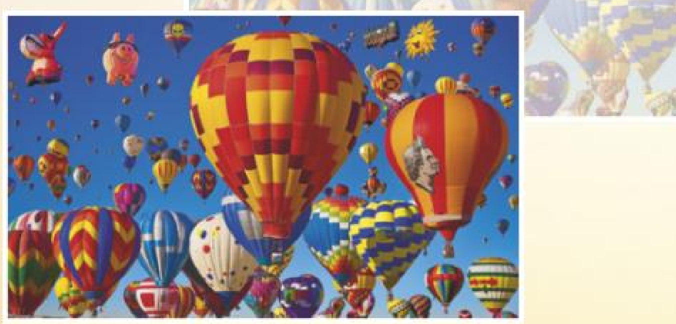
- Quando dois ângulos são complementares? E suplementares?
- O que são ângulos correspondentes? Qual é a diferença entre ângulo correspondente e ângulo congruente?
- Explique com suas palavras a diferença entre circunferência e círculo.

# 5 PROPORÇÃO E SEMELHANÇA

Quando utilizamos um *software* para ampliar ou reduzir imagens, existe uma opção que pode ser selecionada, que é a de fixar a proporção.

Com essa opção selecionada, mesmo que você deforme a imagem manualmente somente em uma direção, o *software* vai aumentar a imagem na outra, fixando a proporção entre as medidas horizontal e vertical da imagem.

BILL HEINSOHN/PHOTOGRAPHER'S CHOICE/GETTY IMAGES



Observe as imagens ao lado e responda às questões no caderno.

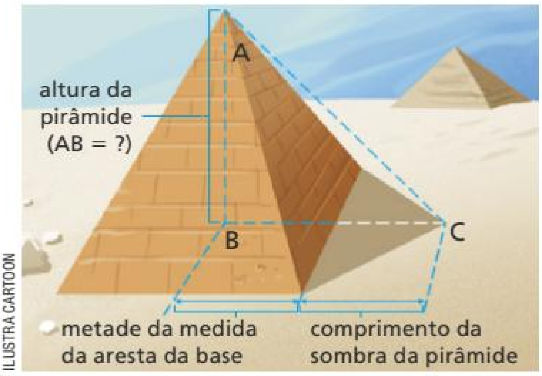
- **Três das imagens apresentadas foram ampliadas sem que fossem fixadas as suas proporções. O que aconteceu com essas imagens?**
- **As imagens que estão em sequência foram ampliadas mantendo-se suas proporções. O que você nota nessas imagens?**
- **Quando duas figuras são semelhantes?**

KOMKRIT NOEMPOEMPISUT/SHUTTERSTOCK.COM

# CAPÍTULO 1

# SEGMENTOS PROPORCIONAIS

## Razão e proporção




A ideia de proporção e sua aplicação em Geometria são bastante antigas. Aproximadamente em 600 a.C., Tales, matemático e comerciante da cidade grega de Mileto, desenvolveu um dos trabalhos mais importantes sobre esse assunto. Conta-se que Tales, em uma de suas viagens ao Egito, foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide de Quéops.

Com apenas um bastão e aplicando os conhecimentos que tinha sobre segmentos proporcionais, Tales venceu o desafio. Ele sabia que a razão entre a altura da pirâmide e o comprimento da sombra projetada pela pirâmide (aumentado pela metade do comprimento da aresta da base da pirâmide) era igual à razão entre a altura do bastão e o comprimento da sombra que ele projetava; bastava, portanto, fazer os cálculos.


Dados dois números reais $a$ e $b$, com $b \neq 0$, chama-se **razão** entre **a** e **b** ou **razão de a para b** o quociente de $a$ por $b$, ou seja, $a : b$ ou $\frac{a}{b}$.

Quatro números, dados em certa ordem, são **proporcionais** quando a razão entre os dois primeiros é igual à razão entre os dois últimos.

Toda proporção é uma igualdade entre duas razões. Portanto, quando quatro números são proporcionais, eles formam uma proporção.

### PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

**1.** Determine a razão entre os números:

**a)** 14 e 20 **b)** 35 e 50

**2.** A razão entre 14 e 20 é igual à razão entre 35 e 50?

**3.** De acordo com a definição de números proporcionais, você pode afirmar que os números 14, 20, 35 e 50, nessa ordem, são proporcionais?

# Razão entre segmentos

Chamamos de **razão entre dois segmentos de reta** a razão entre os números que expressam as medidas desses segmentos, sempre tomados na **mesma unidade**.

Exemplos:

**1** Se o segmento AB mede 6 cm e o segmento CD mede 12 cm, vamos descobrir a razão entre eles.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6}{12} \overset{:6}{=} \frac{1}{2} \text{ ou } 0{,}5$$

$\frac{1}{2}$ → razão procurada

**2** Qual é a razão entre os segmentos AB e DE, com AB = 60 cm e DE = 2 m?

Vamos, inicialmente, transformar as duas medidas na mesma unidade.

AB = 60 cm

DE = 2 m = 200 cm

Agora, podemos encontrar a razão entre AB e DE, veja:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{60}{200} \overset{:20}{=} \frac{3}{10} \text{ ou } 0{,}3$$

$\frac{3}{10}$ → razão procurada

Como as medidas de dois segmentos são sempre expressas por números positivos, a **razão entre dois segmentos** também é um número real positivo. Como a razão é um número real, ela pode ser:

- um número racional: nesse caso dizemos que os segmentos são **comensuráveis**. Por exemplo:

$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$ → AB e CD são segmentos comensuráveis. $\frac{1}{2}$ → número racional

$\frac{AB}{DE} = \frac{3}{10}$ → AB e DE são segmentos comensuráveis. $\frac{3}{10}$ → número racional

- um número irracional: nesse caso dizemos que os segmentos são **incomensuráveis**. Por exemplo:

$\frac{MN}{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{5}$ → MN e PQ são segmentos incomensuráveis. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ → número irracional

Um caso típico do uso da razão entre dois segmentos é a **escala**:

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Acompanhe as situações a seguir.

**1** Em um mapa, a distância, em linha reta, entre Petrópolis e Vassouras, cidades do interior do estado do Rio de Janeiro, é 0,6 cm. Sabendo que a distância real, em linha reta, entre essas duas cidades é de 57 km, qual foi a escala usada nesse mapa?

57 km = 5 700 000 cm

escala $\longrightarrow \dfrac{0{,}6}{5\,700\,000} = \dfrac{6}{57\,000\,000} = \dfrac{1}{9\,500\,000}$

Logo, a escala usada nesse mapa foi de 1 : 9 500 000.

Como 9 500 000 cm equivale a 95 km, cada 1 cm no mapa corresponde a 95 km da distância real.

**2** Em 1988 foi criado o estado de Roraima, antigo território federal. Boa Vista, capital do estado, possui clima quente e úmido, com duas estações climáticas bem definidas: a estação das chuvas, de abril a setembro, e o verão, de outubro a março. A distância em linha reta entre Boa Vista e Brasília é de 5 cm em um mapa com escala de 1 : 50 000 000. Qual é a distância real, em quilômetros, em linha reta entre Brasília e Boa Vista?

$1 : 50\,000\,000 = \dfrac{1}{50\,000\,000}$

Sendo $x$ a distância real, temos: $\dfrac{1}{50\,000\,000} = \dfrac{5}{x}$

De acordo com a propriedade fundamental das proporções, temos:

$x = 5 \cdot 50\,000\,000$

$x = 250\,000\,000$ cm

Como 250 000 000 cm equivalem a 2 500 km, então a distância real entre Brasília e Boa Vista em linha reta é de 2 500 km.

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

Vista aérea da cidade de Boa Vista, RR. Foto de 2014.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Considere dois segmentos, AB = 16 cm e CD = 40 cm. Qual é a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nas formas fracionária e decimal?

**2.** São dados dois segmentos: o primeiro mede 4 m, e o segundo, 160 cm. Qual é a razão entre o primeiro e o segundo segmento?

**3.** A razão entre dois segmentos é 0,4, e o maior deles mede 8 m. Qual é a medida do menor segmento, em metros?

**4.** Na figura abaixo, $a$ representa a medida do segmento AB e $b$, a medida do segmento BC.


EDITORIA DE ARTE

Sabendo que $a$ e $b$ correspondem às raízes da equação do 2º grau $x^2 - 24x + 135 = 0$, determine $a$ e $b$ e calcule a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

# Segmentos proporcionais

Pelas definições de proporção e razão de segmentos, podemos dizer que quatro segmentos, AB, CD, EF e GH, nessa ordem, são proporcionais quando a razão entre as medidas dos dois primeiros for igual à razão entre as medidas dos dois últimos, ou seja:

> $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são, nessa ordem, proporcionais, quando $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

Lembre-se de que as medidas dos segmentos devem estar na mesma unidade para formar a proporção. Considere, então, as seguintes situações:

**1** Os segmentos AB = 4 cm, CD = 6 cm, EF = 8 cm e GH = 12 cm formam, nessa ordem, uma proporção?

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} \\ \\ \frac{EF}{GH} = \frac{8}{12} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{4}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Logo, os segmentos AB, CD, EF e GH, nessa ordem, são proporcionais.

**2** Quatro segmentos, AB, MN, PQ e XY, nessa ordem, são proporcionais. Sabendo que AB = 5 cm, MN = 15 cm e PQ = 4 cm, vamos encontrar a medida de $\overline{XY}$.

Como $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{XY}$ são proporcionais, temos: $\frac{AB}{MN} = \frac{PQ}{XY}$.

Mas $\frac{AB}{MN} = \frac{5}{15} \overset{:5}{\underset{:5}{=}} \frac{1}{3}$.

Então:

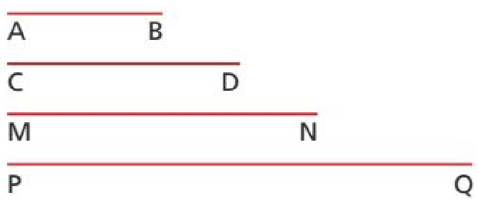
$$\frac{PQ}{XY} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{XY} = \frac{1}{3} \Rightarrow XY = 12$$

Assim, a medida de $\overline{XY}$ é 12 cm.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** **Usando uma régua graduada, meça, em centímetro, cada um dos seguintes segmentos.**




EDITORIA DE ARTE

**De acordo com as medidas obtidas, você pode afirmar que os segmentos AB, CD, MN e PQ, nessa ordem, são proporcionais? Por quê?**

**2.** **Os segmentos AB CD, MN e PQ são proporcionais e tais que AB = 3,2 cm; MN = 6,5 cm e PQ = 26 cm. Nessas condições, qual é a medida de $\overline{CD}$?**

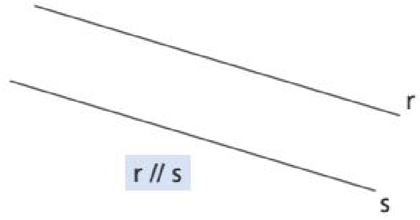
**3.** **Sabe-se que EF = *x* cm, GH = (*x* + 6) cm, RS = 16 cm e NP = 28 cm. Sabendo que EF, GH, RS e NP são, nessa ordem, segmentos proporcionais, determine o valor de *x*.**

**4.** **Um segmento de 2 cm representa, no papel, uma estrada reta de comprimento 20 km. Esse segmento foi desenhado em que escala?**

CAPÍTULO 2

# FEIXE DE RETAS PARALELAS

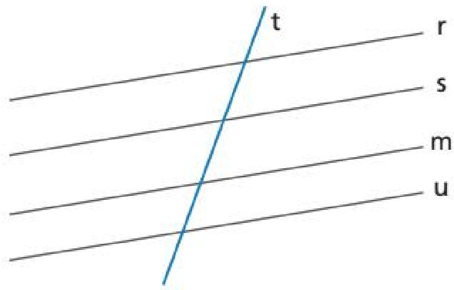
Duas retas, *r* e *s*, de um plano são **paralelas** quando não possuem pontos em comum.




Se considerarmos três ou mais retas paralelas entre si, teremos um **feixe de retas paralelas** ou simplesmente um **feixe de paralelas**.

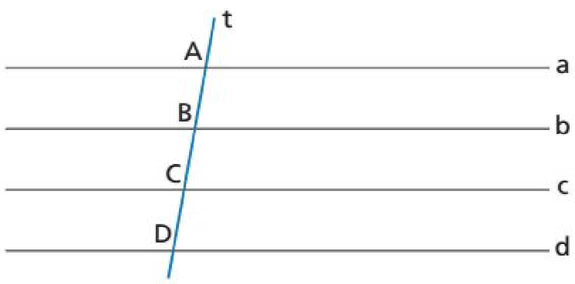
Na figura a seguir, a reta *t* que corta o feixe de retas paralelas é denominada **reta transversal**. De acordo com a figura, temos:

- r // s // m // u → **feixe de retas paralelas**
- reta *t* → **reta transversal**




## Propriedade de um feixe de retas paralelas

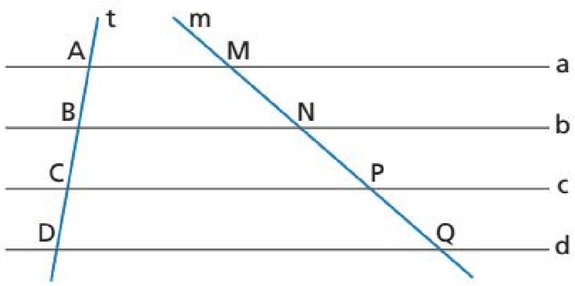
Consideremos um feixe de retas paralelas cortadas por uma reta transversal *t*:




Como podemos ver na figura, o feixe de paralelas a // b // c // d determina na reta transversal *t* os segmentos AB, BC e CD. Usando uma régua graduada, vemos que:

AB = BC = CD = 0,8 cm (os segmentos AB, BC e CD são **congruentes**)

Vamos, agora, traçar uma reta *m*, também transversal ao feixe de paralelas, determinando os segmentos MN, NP e PQ:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Medindo esses segmentos, com uma régua graduada, vemos que MN = NP = PQ = 1,2 cm, ou seja, os segmentos MN, NP e PQ são congruentes entre si.

Repetindo esse procedimento, traçamos outras transversais ao feixe de paralelas e verificamos que os segmentos determinados em cada transversal serão congruentes entre si.

De modo geral, temos:

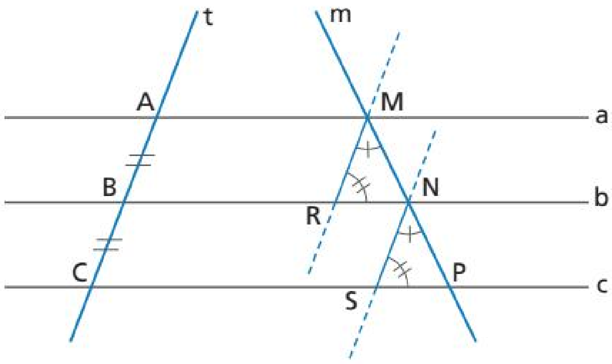
> Se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, também determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Vamos fazer a demonstração usando um feixe de três retas paralelas.

Sejam as retas a // b // c e as retas *t* e *m* duas transversais, tais que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Vamos provar que $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.

Traçamos por *M* e *N* retas paralelas à reta *t*.

- ABRM é um paralelogramo $\rightarrow \overline{AB} \cong \overline{MR}$
- BCSN é um paralelogramo $\rightarrow \overline{BC} \cong \overline{NS}$
- $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (dado) $\rightarrow \overline{MR} \cong \overline{NS}$ (1)
- $R\hat{M}N \cong S\hat{N}P$ (ângulos correspondentes) (2)
- $M\hat{R}N \cong N\hat{S}P$ (b // c e $\overline{MR}$ // $\overline{NS}$) (3)



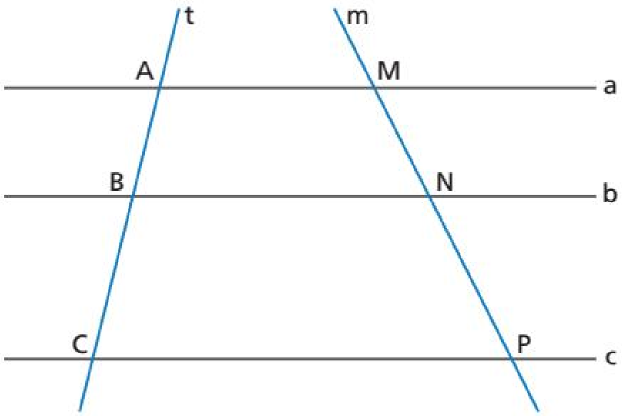

Por (1), (2) e (3), temos $\triangle MRN \cong \triangle NSP$ (caso de congruência de triângulos ALA – Ângulo, Lado, Ângulo).

Portanto, $\overline{MN} \cong \overline{NP}$. Essa demonstração pode ser estendida a um feixe de mais de três retas paralelas.

# Teorema de Tales

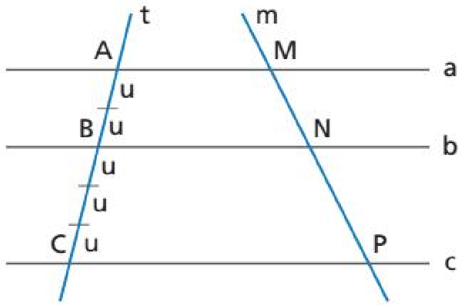
Vamos ver o que acontece quando os segmentos determinados por um feixe de paralelas sobre duas transversais não são congruentes entre si.

- Sejam as retas a // b // c, que determinam na reta transversal *t* os segmentos AB e BC e na reta transversal *m* os segmentos MN e NP.



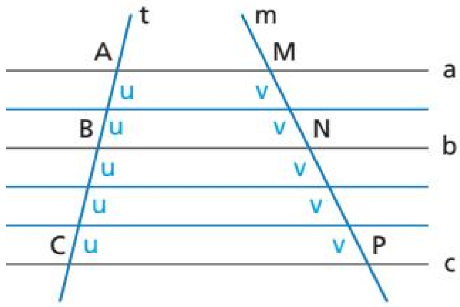

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- Vamos tomar uma unidade *u* que divida $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em um número inteiro de partes iguais. Por exemplo, na figura abaixo AB = 2u e BC = 3u. Dividimos, assim, os segmentos AB e BC em duas e três partes, respectivamente, de modo que os cinco segmentos obtidos sejam congruentes.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- Pelos pontos de divisão, traçamos retas paralelas às retas *a*, *b* e *c*. Pela propriedade vista anteriormente, se os segmentos determinados em *t* são congruentes, então os segmentos determinados em *m* também serão congruentes. Chamamos essas medidas de *v*.
  Então, no exemplo dado temos:



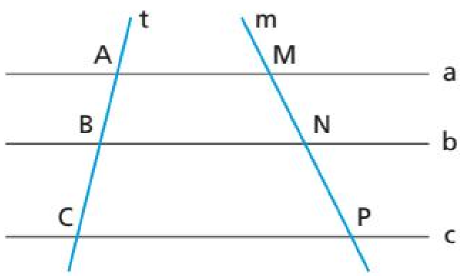

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{MN}{NP} = \frac{2v}{3v} = \frac{2}{3}$$

Podemos observar que $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$, o que significa que os segmentos AB, BC, MN e NP, nessa ordem, são proporcionais.

Essa relação é conhecida como **teorema de Tales**, em homenagem ao matemático grego Tales de Mileto. Podemos enunciar o teorema da seguinte maneira:

> Um feixe de paralelas determina em duas transversais segmentos proporcionais.




$$a \parallel b \parallel c \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

Podemos ainda considerar outras proporções com base no teorema de Tales:

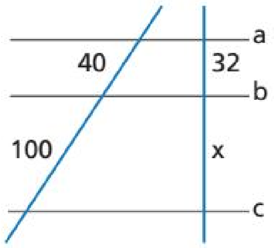
- $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$
- $\frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$
- $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$

## ATIVIDADES

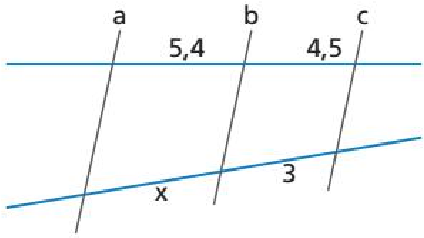
Responda às questões no caderno.

**1.** Em cada uma das figuras, temos que a // b // c. Considerando as medidas dadas, em unidades de comprimento, calcule o valor de *x*.

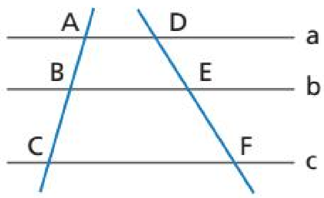
**a)**



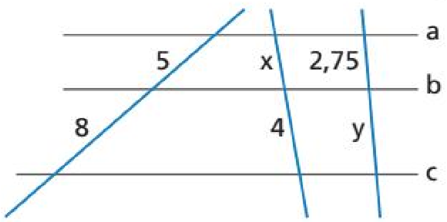

**b)**



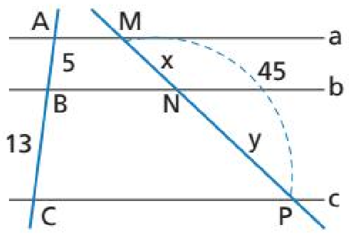

**2.** Na figura, temos que a // b // c. Considerando que AB = 21 cm, AC = 49 cm e DE = 27 cm, qual a medida de $\overline{DF}$?



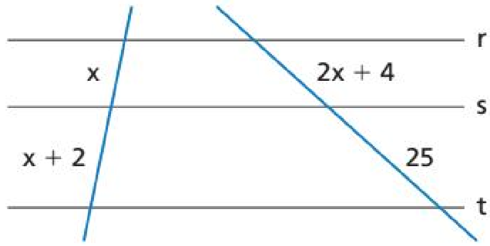

**3.** Considerando a figura abaixo em que a // b // c, determine o valor de $x + y$.



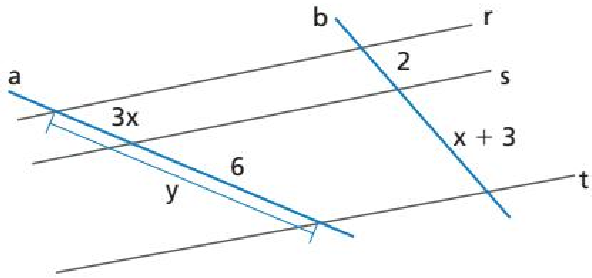

**4.** Sabendo que a // b // c, qual é o valor de $y - x$?



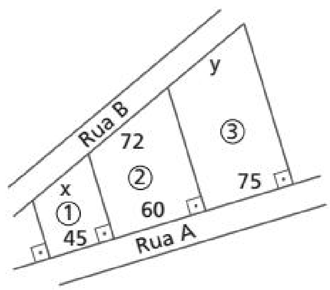

**5.** Quais os possíveis valores que a medida *x* pode assumir na figura abaixo, sabendo que r // s // t?




**6.** Quais são os valores das medidas *x* e *y* indicadas na figura?

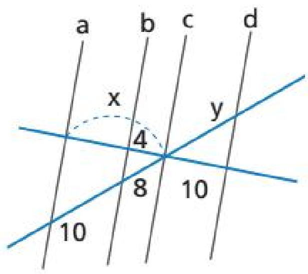



**7.** A figura seguinte indica três lotes de terreno com frentes para a rua *A* e para a rua *B*. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua *A* e paralelas entre si. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua *A* medem, respectivamente, 45 metros, 60 metros e 75 metros. A frente do lote 2 para a rua *B* mede 72 metros. Quais as medidas das frentes para a rua *B* dos lotes 1 e 3?



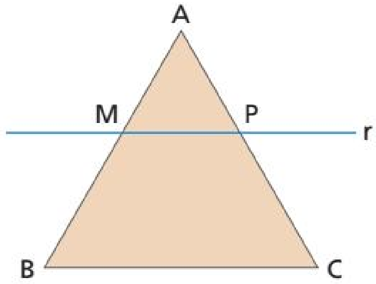

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**8.** Na figura, considere que a // b // c // d. De acordo com os dados, determine o valor da expressão $x + y$.



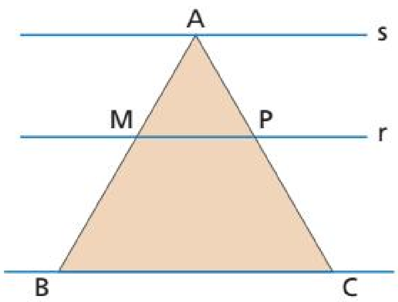
# Teorema de Tales nos triângulos

No $\triangle ABC$ da figura, traçamos uma reta *r*, paralela ao lado $\overline{BC}$. Assim, a reta *r* corta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos *M* e *P*, respectivamente.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

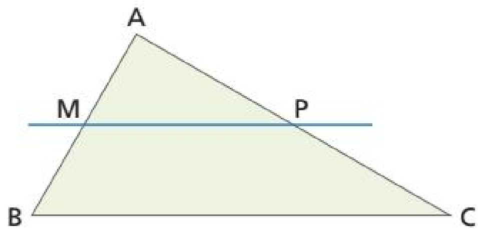
Se traçarmos pelo vértice *A* uma reta *s*, paralela à reta *r*, obteremos três retas paralelas ($\overleftrightarrow{BC}$, *r* e *s*) e duas transversais ($\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$).




$r \parallel s \parallel \overleftrightarrow{BC}$

Pelo teorema de Tales: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AP}{PC}$.

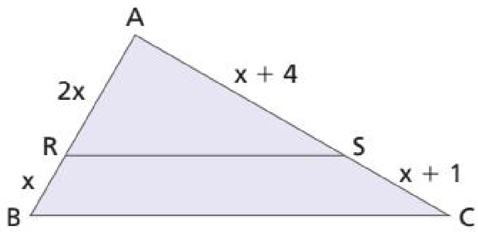
Toda reta paralela a um lado de um triângulo que encontra os outros dois lados em pontos distintos determina, sobre esses dois lados, segmentos proporcionais.




Se $\overline{MP} \parallel \overline{BC}$, então: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AP}{PC}$.

Considere, agora, a seguinte situação, na qual podemos aplicar o teorema de Tales no triângulo.

Na figura abaixo, $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$. Vamos determinar a medida de *x*.



Aplicando o teorema de Tales no triângulo, temos:

$$\frac{2x}{x} = \frac{x+4}{x+1}$$

$2x(x + 1) = x(x + 4)$

$x^2 - 2x = 0$

$x = 0$ ou $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como $x = 0$ não serve, então $x = 2$.

**SAIBA QUE**

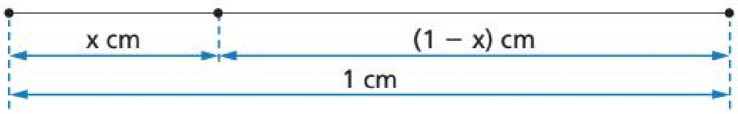
As medidas dos lados de triângulos devem ser sempre maiores que zero. Assim, quando encontramos um valor menor ou igual a zero, devemos desconsiderá-lo.

**PARA QUEM QUER MAIS**

## Segmento áureo

Considere um segmento AB, que mede 1 cm, e um ponto C que fica entre *A* e *B*. Encontre a distância que esse ponto *C* deve ficar de *A* tal que a razão entre os segmentos CB e CA seja igual a razão entre os segmentos AB e AC.

Analisando o enunciado, podemos montar o seguinte esquema:




EDITORIA DE ARTE

Além disso, do enunciado, podemos escrever:

$$\frac{CB}{CA} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Calculando as raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$, temos:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Por se tratar de uma medida de comprimento o valor de x deve ser positivo, assim temos que o ponto C deve estar a $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ cm do ponto A.

O número $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ é conhecido como número de ouro, já o segmento AC recebe o nome de segmento áureo. Esses elementos podem ser observados em diversas construções humanas (Parthenon, por exemplo) e até mesmo na natureza (conchas de caracóis, por exemplo).

**NÓS**

## Crescimento populacional

De acordo com o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o crescimento populacional do Brasil tende a reduzir-se ao longo dos anos. Ao observar os dados dos últimos anos, já é possível notar uma redução. Em 2011, o crescimento populacional foi de 1,4%; em 2013, foi de 0,83%; e, em 2016, foi de 0,8%; e a estimativa é que esse crescimento populacional continue desacelerando.

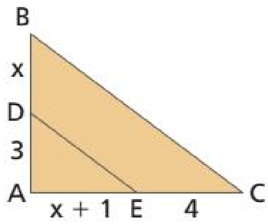
Informações obtidas em: PESQUISA aponta queda no crescimento populacional no Brasil. **Jornal Nacional**. Disponível em: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2016/08/pesquisa-aponta-queda-no-crescimento-populacional-no-brasil.html>. Acesso em: 30 out. 2018.

- Se a estimativa do IBGE se confirmar, qual será o perfil dos brasileiros a partir de 2050?

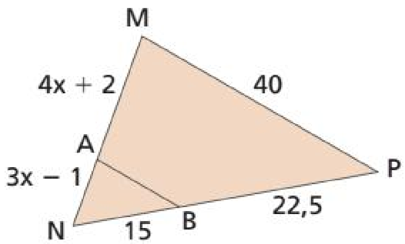
## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

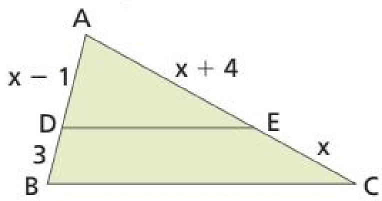
**1.** Determine o valor de $x$ sabendo que: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.




**2.** Na figura, temos que $\overline{AB} \parallel \overline{MP}$. Qual é o perímetro do triângulo MNP?

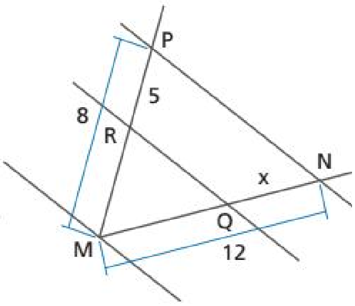



**3.** No triângulo ABC da figura, temos que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Sabendo que a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo é 14 cm, calcule as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e o perímetro desse triângulo.

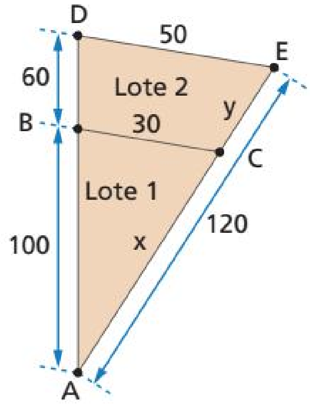



**4.** Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede 30 cm. Se traçarmos uma paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo, ela vai cortar o lado $\overline{AB}$ no ponto $D$ e o lado $\overline{AC}$ no ponto $E$. Sabendo que AE = 15 cm, EC = 9 cm, determine as medidas $x$ (do segmento AD) e $y$ (do segmento DB).

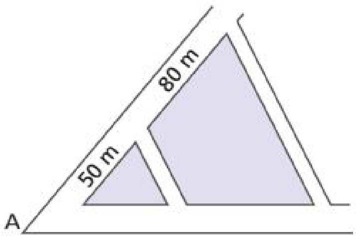
**5.** Considere que $\overline{QR} \parallel \overline{NP}$ na figura. Qual é o valor da medida $x$ do segmento QN?



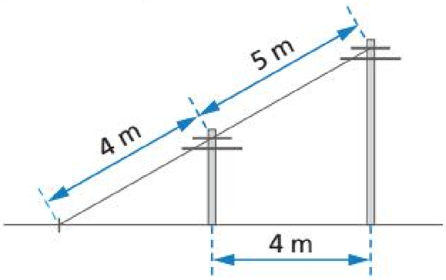

**6.** A figura representa uma quadra de um loteamento que foi dividida em dois lotes. Nela, estão indicadas algumas medidas, em metro. Sabendo que $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{DE}$, qual é o perímetro de cada lote?




**7.** Duas avenidas têm origem em um mesmo ponto $A$ e cortam duas ruas paralelas, como mostra a figura. Em uma avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas medem 50 m e 80 m, respectivamente. Na outra avenida, partindo de $A$, o primeiro quarteirão é 36 m menor que o segundo. Quais os comprimentos dos quarteirões da segunda avenida?



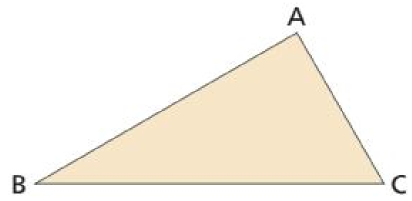

**8.** O esquema mostra dois postes perpendiculares ao solo e que estão a 4 m de distância um do outro, e um fio bem esticado de 5 m ligando os seus topos. Prolongando esse fio até prendê-lo no solo, são utilizados mais 4 m de fio. Qual é a distância entre o ponto onde o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo a ele?



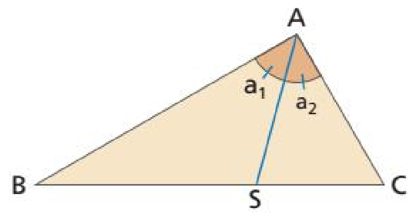

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

# Teorema da bissetriz interna de um triângulo

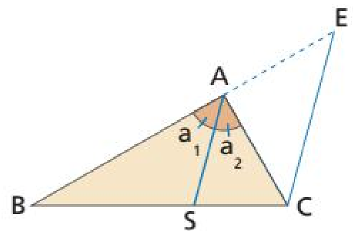
- Consideremos o triângulo ABC da figura.




- Traçamos a bissetriz interna do ângulo A na figura, o segmento AS.




- Traçamos pelo vértice *C* uma paralela à bissetriz $\overline{AS}$ e observamos que essa paralela vai encontrar o prolongamento do lado $\overline{AB}$ no ponto *E*.




Considerando o triângulo BCE e sabendo que $\overline{AS} \parallel \overline{CE}$, podemos escrever:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{SC} \quad (1)$$

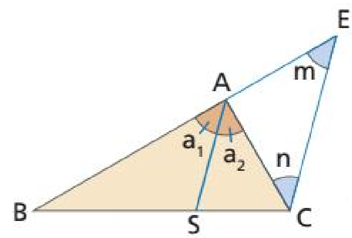
- Tomando como base a mesma figura, temos:

$m = a_1$ (ângulos correspondentes)

$n = a_2$ (ângulos alternos internos)

$a_1 = a_2$ ($\overline{AS}$ é bissetriz de $\hat{A}$)

Então, $m = n$. Portanto, $\triangle AEC$ é isósceles e $AE = AC$.

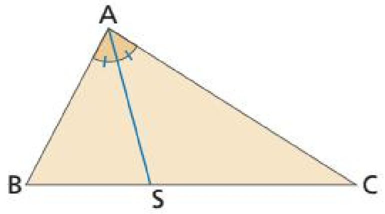



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Substituindo AE por AC na proporção (1), temos: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BS}{SC}$.

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina, sobre o lado oposto, segmentos que são proporcionais aos lados do triângulo que formam o ângulo considerado.

$\overline{AS}$ é a bissetriz interna do ângulo A no triângulo ABC da figura abaixo:



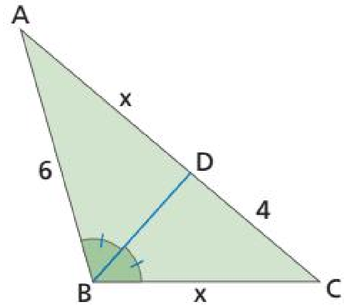

Então:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BS}{SC} \text{ ou } \frac{AB}{BS} = \frac{AC}{SC}$$

Considere a seguinte situação:

Na figura abaixo, $\overline{BD}$ é bissetriz interna do ângulo B. Vamos determinar o valor de *x*.

Pelo teorema da bissetriz interna, temos:




$$\frac{x}{6} = \frac{4}{x} \Rightarrow x \cdot x = 6 \cdot 4 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{24} \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

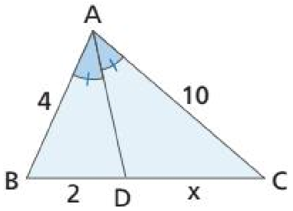
Então, $x = 2\sqrt{6}$. Descartamos o valor $-2\sqrt{6}$, pois, como se trata de uma medida de segmento, a resposta não pode ser nula, nem negativa.

## ATIVIDADES

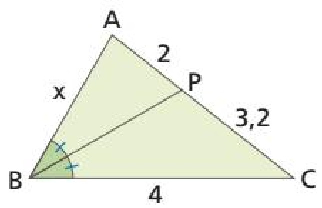
Responda às questões no caderno.

**1.** Calcule o valor da medida *x* em cada figura, conforme a condição dada em cada item.

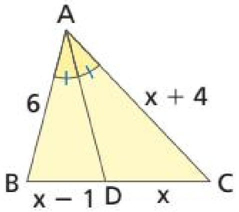
**a)** $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo A.




**b)** $\overline{BP}$ é a bissetriz do ângulo B.

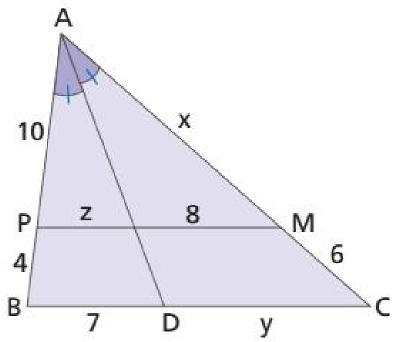



**2.** Sendo $\overline{AD}$ a bissetriz do ângulo A na figura, calcule as medidas de $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$.




**3.** Se os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo ABC medem, respectivamente, 12 cm, 15 cm e 18 cm, e $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo B, quanto medem os segmentos AD e DC?

**4.** No triângulo ABC da figura, sabemos que PM // BC, e AD é a bissetriz interna do ângulo A.




Nessas condições, qual é o perímetro:

**a)** do triângulo ABC?

**b)** do trapézio PBCM?

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

CAPÍTULO

# 3 FIGURAS SEMELHANTES

## Encontrando semelhanças

Podemos dizer que duas figuras são **semelhantes** quando têm a mesma forma sem precisar ter, necessariamente, o mesmo tamanho. Dessa maneira, podemos entender uma ampliação e uma redução como exemplos de semelhança. Figuras congruentes também são semelhantes. Vejamos melhor o que significa "ser semelhante a" em Geometria.

Os dois mapas a seguir são representações do estado do Paraná, mas estão em escalas diferentes. Neles, destacamos algumas cidades. Veja:


Mapa 1.

Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 6. ed. Rio de Janeiro, 2012.


Mapa 2.

Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 6. ed. Rio de Janeiro, 2012.

Você pode notar que, embora sejam de tamanhos diferentes, os dois mapas têm a mesma forma: o mapa 2 é uma ampliação do mapa 1. Dizemos que esses mapas representam figuras semelhantes.

**NÓS**

### Riscos dos balões

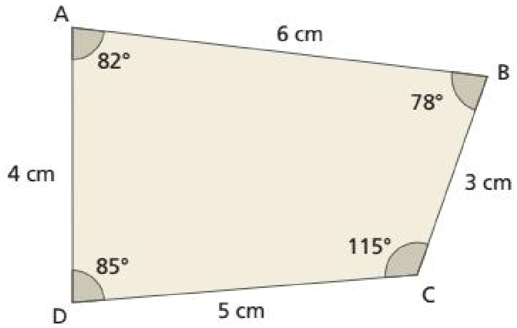
Diferentemente do balonista, que é o praticante do balonismo, o baloeiro tem como atividade a fabricação e a soltura de balões feitos, em geral, de papel, arame e madeira.

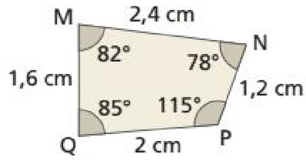
Fabricar, vender, transportar ou soltar balões é crime com pena prevista de detenção de um a três anos e/ou multa, pois, além de perigosos, não possuem controle e podem provocar incêndios, atingir aviões, entre outras coisas.

- Todos os anos, principalmente nos meses de junho e julho, diversas propagandas sobre os riscos de soltar balões são veiculadas em todo o território nacional. Mesmo assim, não são poucas as notícias sobre balões que cortam os céus das cidades. Debata com seus colegas sobre os motivos que levam à ineficácia dessas propagandas na conscientização de quem pratica essa atividade.

# Polígonos semelhantes

Observe os quadriláteros ABCD e MNPQ:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Note que:

- os ângulos correspondentes possuem a mesma medida:
  $\hat{A} \cong \hat{M}$, $\hat{B} \cong \hat{N}$, $\hat{C} \cong \hat{P}$, $\hat{D} \cong \hat{Q}$.
- os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{6}{2,4} = 2,5$$

$$\frac{BC}{NP} = \frac{3}{1,2} = 2,5$$

$$\frac{CD}{PQ} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\frac{AD}{MQ} = \frac{4}{1,6} = 2,5$$

Portanto:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{AD}{MQ} = 2,5$$

Dizemos, então, que os quadriláteros ABCD e MNPQ são semelhantes. Indicamos assim:

quadrilátero ABCD ~ quadrilátero MNPQ

semelhante

> Dois polígonos são semelhantes quando possuem os ângulos internos respectivamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

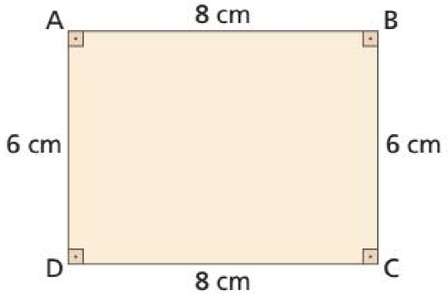
Observe novamente os quadriláteros ABCD e MNPQ. Note que os ângulos internos correspondentes desses quadriláteros são congruentes e que a razão entre qualquer lado do quadrilátero ABCD e o lado correspondente no quadrilátero MNPQ é sempre a mesma: 2,5. Dizemos, então, que os quadriláteros ABCD e MNPQ são semelhantes e que 2,5 é a **razão de semelhança** entre eles.

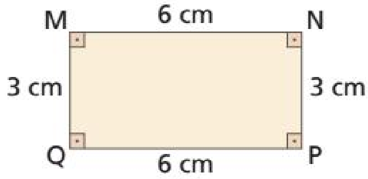
Para saber se dois polígonos são semelhantes, devemos verificar duas condições:

- os ângulos internos correspondentes devem ser congruentes;
- os lados correspondentes devem ser proporcionais.

Satisfazer apenas uma das condições não atesta a semelhança entre dois polígonos, como podemos comprovar pelos exemplos a seguir.

**1** Vamos verificar se os quadriláteros ABCD e MNPQ são semelhantes.




Observando os quadriláteros, podemos verificar que:

- os ângulos correspondentes são congruentes (são retos);
- os lados correspondentes não são proporcionais, veja:

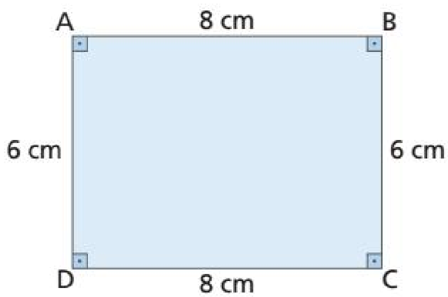
$$\frac{AB}{MN} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

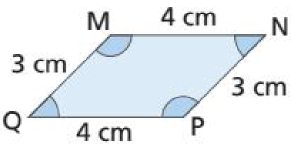
$$\frac{BC}{NP} = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto, $\frac{AB}{MN} \neq \frac{BC}{NP}$.

Logo, os quadriláteros ABCD e MNPQ não são semelhantes.

**2** Vamos conferir se os quadriláteros a seguir são semelhantes.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Fazendo a verificação, temos:

- Os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{8}{4} = 2$$

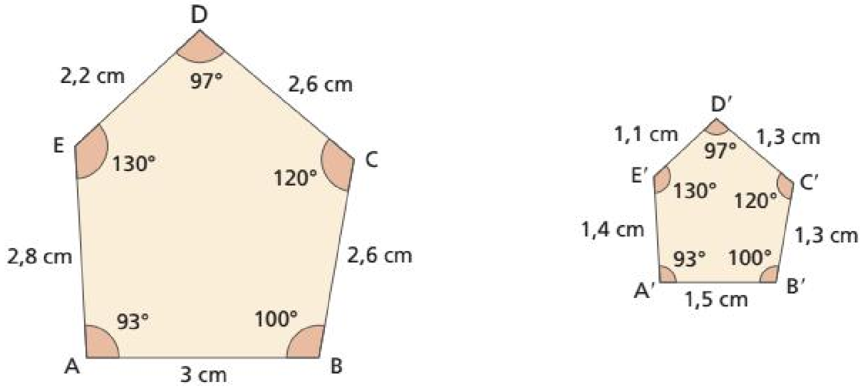
$$\frac{BC}{NP} = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto, $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = 2$.

- Os ângulos correspondentes não são congruentes. Nesse caso, os quadriláteros ABCD e MNPQ não são semelhantes.

## Uma propriedade importante

Observe os pentágonos ABCDE e A'B'C'D'E'.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe que:

- os ângulos correspondentes são respectivamente congruentes;
- os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{1,5} = 2 \qquad \frac{BC}{B'C'} = \frac{2,6}{1,3} = 2 \qquad \frac{CD}{C'D'} = \frac{2,6}{1,3} = 2$$

$$\frac{DE}{D'E'} = \frac{2,2}{1,1} = 2 \qquad \frac{EA}{E'A'} = \frac{2,8}{1,4} = 2$$

Então, ABCDE ~ A'B'C'D'E', e a razão de semelhança é 2.
Vamos, agora, calcular os perímetros dos dois pentágonos.

- Perímetro (P) de ABCDE:

$$P = 3\text{ cm} + 2,6\text{ cm} + 2,6\text{ cm} + 2,2\text{ cm} + 2,8\text{ cm}$$
$$P = 13,2\text{ cm}$$

Perímetro (P') de A'B'C'D'E':

$$P' = 1,5\text{ cm} + 1,3\text{ cm} + 1,3\text{ cm} + 1,1\text{ cm} + 1,4\text{ cm}$$
$$P' = 6,6\text{ cm}$$

Calculando a razão entre os perímetros, temos:

$$\frac{P}{P'} = \frac{13,2}{6,6} = 2$$

**razão de semelhança ou razão entre as medidas dos lados correspondentes**

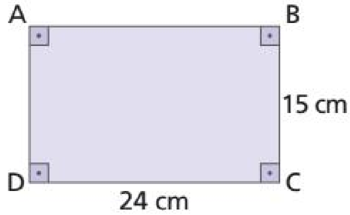
De modo geral:

> Quando dois polígonos são semelhantes, os perímetros desses polígonos são proporcionais às medidas de dois lados correspondentes quaisquer.

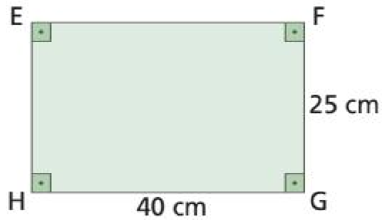
# ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

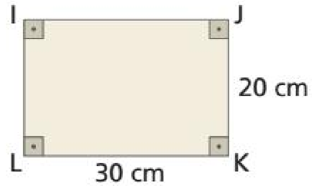
**1.** Dado o retângulo ABCD da figura, demonstre as afirmações dos itens *a* e *b*.




**a)** O retângulo ABCD é semelhante ao retângulo EFGH.




**b)** O retângulo ABCD não é semelhante ao retângulo IJKL.




**2.** Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações a seguir:

**a)** Dois retângulos são sempre semelhantes.

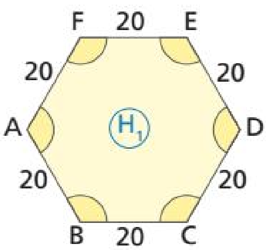
**b)** Dois quadrados são sempre semelhantes.

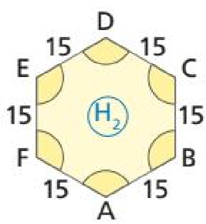
**c)** Dois triângulos são sempre semelhantes.

**d)** Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.

**e)** Dois polígonos regulares com a mesma quantidade de lados são sempre semelhantes.

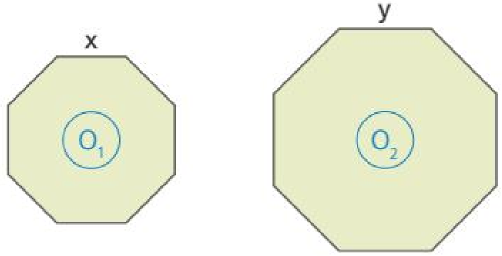
**3.** Os hexágonos $H_1$ e $H_2$ são regulares; logo, são semelhantes.




Qual é a razão de semelhança entre $H_1$ e $H_2$?

**4.** Dados os octógonos regulares $O_1$ e $O_2$, o perímetro de $O_1$ é 48 cm, e a razão de semelhança entre $O_1$ e $O_2$ é $\frac{3}{4}$.

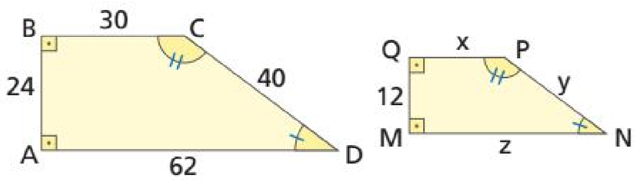



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** Qual é a medida do perímetro de $O_2$?

**b)** Quais são as medidas de *x* e *y*?

**5.** Os trapézios ABCD e MQPN a seguir são semelhantes.

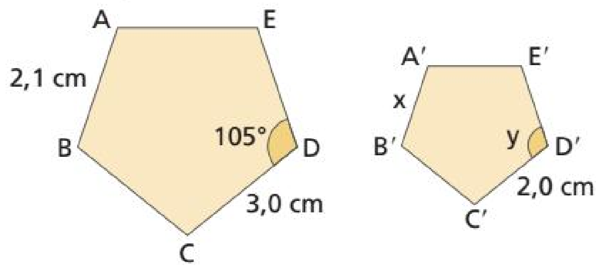



**a)** Qual é a razão de semelhança entre os trapézios ABCD e MQPN?

**b)** Qual o valor das medidas *x*, *y* e *z* indicadas?

**c)** Sem fazer cálculos, escreva a razão entre o perímetro de ABCD e o perímetro de MQPN.

**6.** Sabe-se que os pentágonos ABCDE e A′B′C′D′E′ são semelhantes; o lado $\overline{CD}$ é correspondente a $\overline{C'D'}$ e o lado $\overline{AB}$ é correspondente a $\overline{A'B'}$.




**a)** Qual a razão de semelhança entre ABCDE e A′B′C′D′E′?

**b)** Qual a medida *y* indicada?

**c)** Qual a medida *x* indicada?

# Triângulos semelhantes

Você se lembra dos mapas do estado do Paraná, desenhados cada um em uma escala da página 159? Observe os triângulos cujos vértices são os três pontos que indicam as cidades de Curitiba, Maringá e Cascavel.


Mapa 3.

Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 6. ed. Rio de Janeiro, 2012.

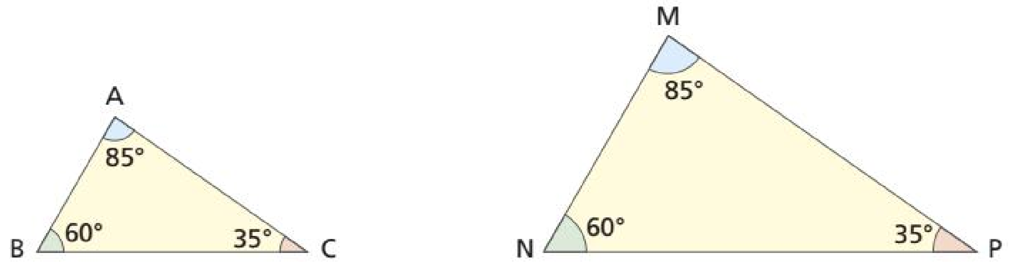

Mapa 4.

Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 6. ed. Rio de Janeiro, 2012.

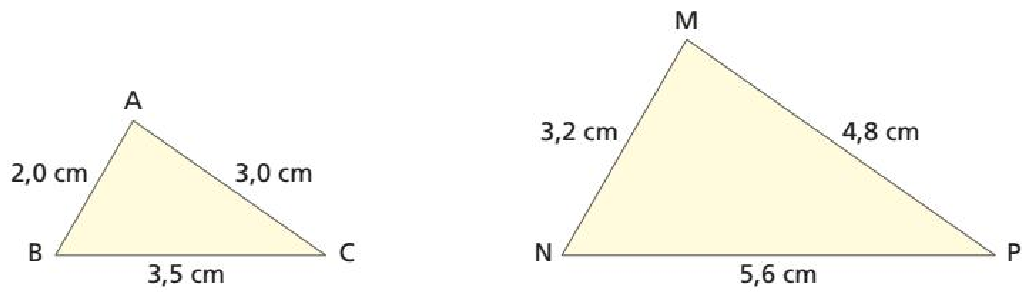
Esses dois triângulos satisfazem as condições que tornam semelhantes dois polígonos: os ângulos internos são respectivamente congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Os triângulos, porém, constituem um caso especial de polígono: para verificar se dois triângulos são semelhantes, basta que uma das duas condições citadas acima se verifique. Se uma delas for satisfeita, a outra também será. Vamos fazer essa verificação:

- Os ângulos internos são respectivamente congruentes.




- Os lados correspondentes são proporcionais:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\frac{AB}{MN} = \frac{2{,}0}{3{,}2} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$\frac{AC}{MP} = \frac{3{,}0}{4{,}8} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$\frac{BC}{NP} = \frac{3{,}5}{5{,}6} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

Dois triângulos são semelhantes quando têm: os ângulos internos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais.

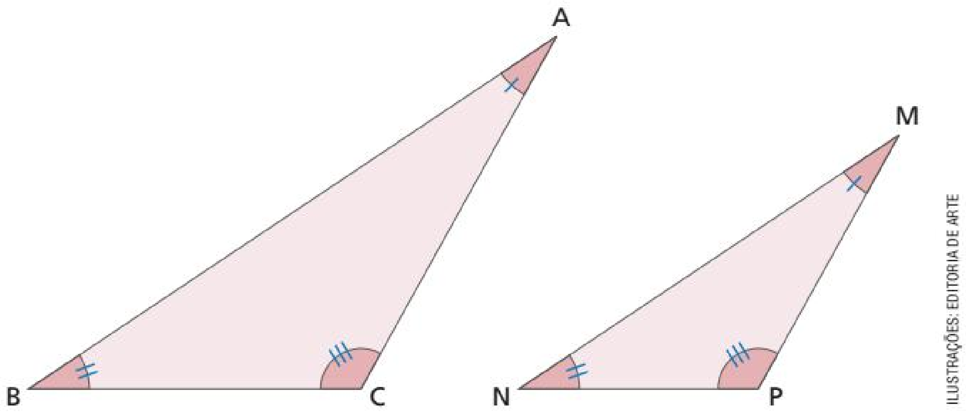
Em dois triângulos semelhantes:

- Os ângulos congruentes são chamados **ângulos correspondentes**.
- Os lados opostos aos ângulos correspondentes são chamados **lados homólogos**.

Se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente congruentes, o terceiro ângulo de cada triângulo também será congruente, pois a soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo é igual a 180°.

Assim, para saber se dois triângulos são semelhantes, basta verificar se eles possuem dois ângulos respectivamente congruentes.

Consideremos os triângulos ABC e MNP.




Pelas indicações nas figuras, temos:

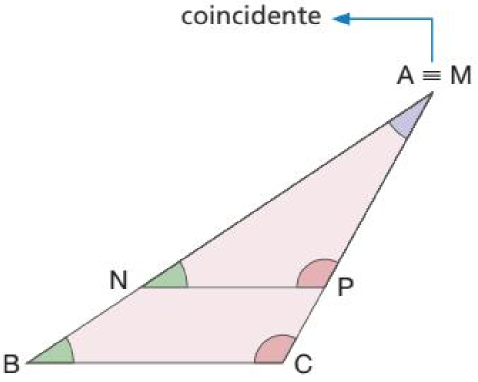
$\hat{A} \cong \hat{M}$ $\hat{B} \cong \hat{N}$ $\hat{C} \cong \hat{P}$

Então, $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

Vamos demonstrar que, se os ângulos do $\triangle ABC$ e do $\triangle MNP$ são congruentes, então:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

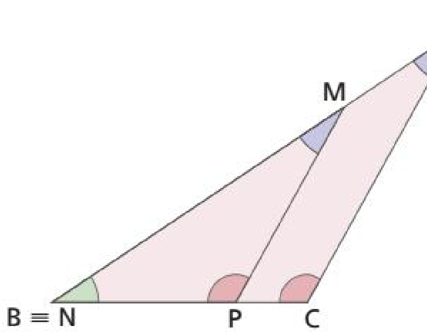
Como os ângulos $\hat{M}$ e $\hat{A}$ são congruentes, vamos sobrepor o $\triangle MNP$ ao $\triangle ABC$, de modo que $\hat{M}$ fique superposto a $\hat{A}$.




Nessas condições, $\overline{NP}$ é paralelo a $\overline{BC}$, pois $\hat{N} \cong \hat{B}$ (ângulos correspondentes). Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \quad \text{(I)}$$

Como os ângulos $\hat{N}$ e $\hat{B}$ são congruentes, vamos sobrepor o $\triangle MNP$ ao $\triangle ABC$, de modo que $\hat{N}$ fique superposto a $\hat{B}$.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nessas condições, $\overline{MP}$ é paralelo a $\overline{AC}$, pois $\hat{M} \cong \hat{A}$ (ângulos correspondentes). Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{BC}{NP} = \frac{AB}{MN} \quad \text{(II)}$$

Das igualdades (I) e (II), concluímos que:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

Ou seja, os lados do $\triangle ABC$ são proporcionais aos lados correspondentes do $\triangle MNP$.

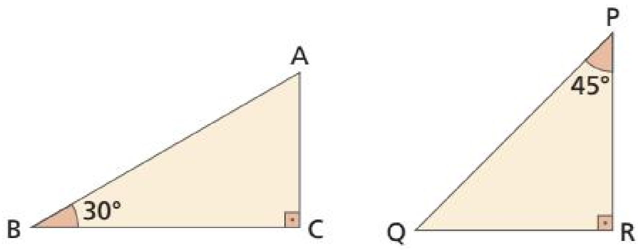
> Se dois triângulos são semelhantes, então os lados de um são proporcionais aos lados do outro, em relação aos ângulos correspondentes. Dizemos que esses lados são os lados homólogos do par de triângulos semelhantes.

## ATIVIDADES

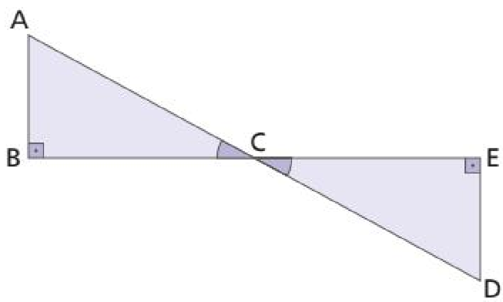
**Responda às questões no caderno.**

**1.** **Em cada item, você encontra um par de triângulos. Responda, de acordo com as indicações feitas, se os pares de triângulos são ou não semelhantes.**

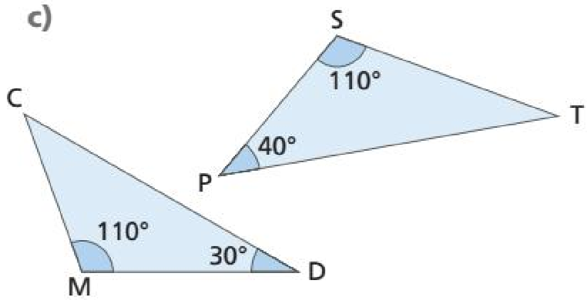
**a)**



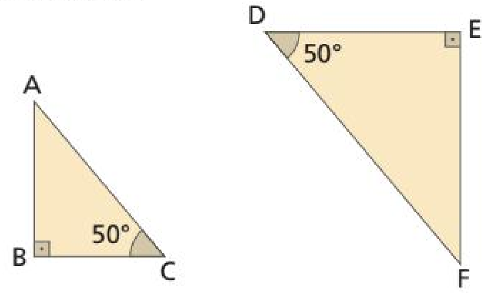

**b)**



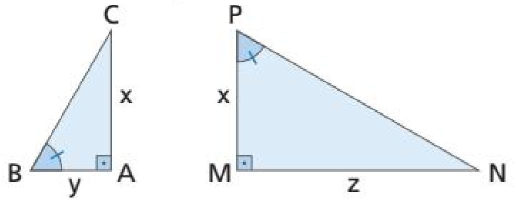

**c)**



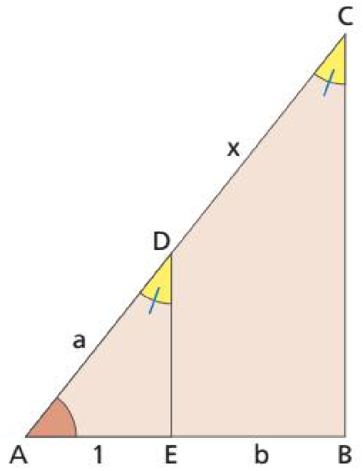
**2.** Quais as condições que lhe permitem afirmar que os triângulos abaixo são semelhantes?




**3.** As indicações feitas nos triângulos abaixo nos permitem afirmar que $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle MNP$. Qual é a relação de igualdade que podemos escrever entre as medidas *x*, *y* e *z*?




**4.** Observando a figura, notamos que $\triangle ABC$ é semelhante a $\triangle AED$ ($\hat{A}$ é comum e $\hat{C} \cong \hat{D}$). Qual é o valor de *x* em função de *a* e *b*?

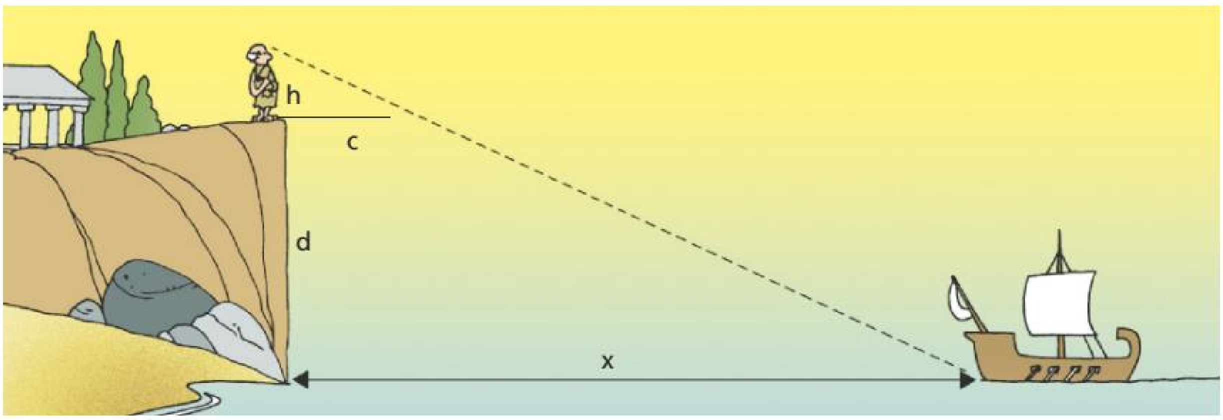



**5.** Calcule a altura *h* de um prédio que lança uma sombra de 19,2 m no mesmo instante em que uma árvore de 8,4 m lança uma sombra de 5,6 m.

**DESAFIO**

**6.** (FGV) Há muitas histórias escritas sobre o mais antigo matemático grego que conhecemos, Tales de Mileto. Não sabemos se elas são verdadeiras, porque foram escritas centenas de anos após sua morte. Uma delas fala do método usado por ele para medir a distância de um navio no mar em relação a um ponto na praia. Uma das versões diz que Tales colocou uma vara na posição horizontal sobre a ponta de um pequeno penhasco, de forma que sua extremidade coincidisse com a imagem do barco.

Conhecendo sua altura (*h*), o comprimento da vara (*c*) e a altura do penhasco (*d*), ele calculou a distância *x* em relação ao barco.




MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Descreva com suas palavras um método para calcular a distância *x*. Em seguida, determine a distância do navio à praia com estes dados: $h = 1{,}80$ m; $c = 0{,}75$ m; $d = 298{,}20$ m.

# Teorema fundamental da semelhança de triângulos

> Toda reta paralela a um lado de um triângulo – e que encontra os outros dois lados em pontos distintos – determina com esses lados um triângulo semelhante ao primeiro.

Considerando o $\triangle ABC$ abaixo, traçamos uma reta *r*, paralela ao lado $\overline{BC}$ e que encontra o lado $\overline{AB}$ no ponto *D* e o lado $\overline{AC}$ no ponto *E*.

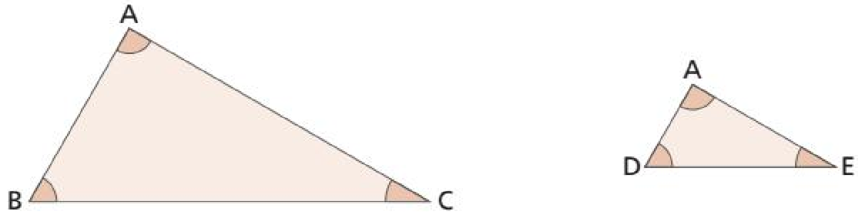

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como r // BC, temos:

- $\hat{B} \cong \hat{D}$ (ângulos correspondentes)
- $\hat{C} \cong \hat{E}$ (ângulos correspondentes)
- $\hat{A} \cong \hat{A}$ (ângulo comum)

Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

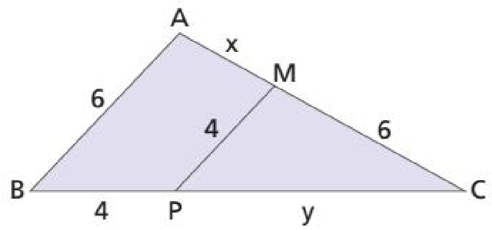
Separando os triângulos ABC e ADE, temos:



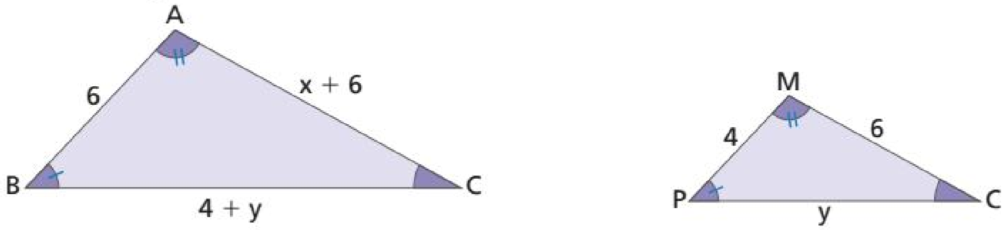

Como os triângulos são semelhantes, seus lados homólogos são proporcionais, ou seja:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Aplicando a propriedade fundamental da semelhança de triângulos e sabendo que $\overline{MP}$ // $\overline{AB}$, vamos calcular as medidas *x* e *y* indicadas na figura abaixo.



Separando os triângulos, temos:




Escrevendo a proporção entre os lados homólogos, temos:

$$\frac{AB}{MP} = \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{PC} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{x+6}{6} = \frac{4+y}{y}$$

$$\frac{x+6}{6} = \frac{6}{4}$$
$4(x + 6) = 6 \cdot 6$
$4x + 24 = 36$
$4x = 12$
$x = 3$

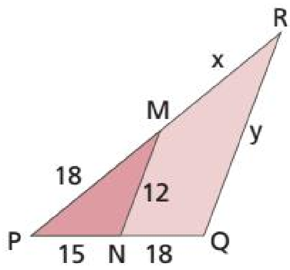
$$\frac{4+y}{y} = \frac{6}{4}$$
$6y = 4(4 + y)$
$6y = 16 + 4y$
$2y = 16$
$y = 8$

Portanto, $x = 3$ e $y = 8$.

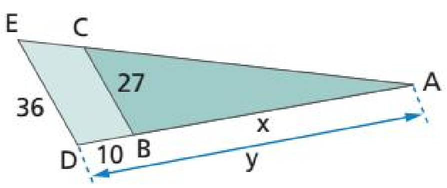
## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

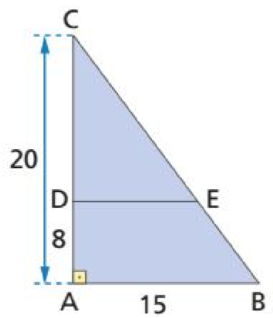
**1.** Sabendo que $\overline{MN} \parallel \overline{RQ}$, determine as medidas $x$ e $y$ indicadas na figura.




**2.** Na figura, temos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Nessas condições, determine as medidas $x$ $(\overline{AB})$ e $y$ $(\overline{AD})$.



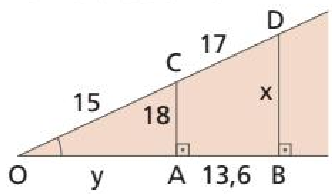

**3.** Observe o triângulo retângulo ABC. Sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$, calcule a área do trapézio ABED.




**SAIBA QUE**

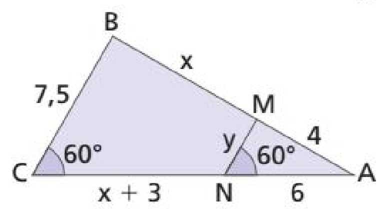
A área do trapézio é dada por $S = \dfrac{AD \cdot (AB + DE)}{2}$

**4.** Observe a figura a seguir. Sabendo que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares a $\overline{OB}$, qual é o valor da razão $\dfrac{x}{y}$? Dê a resposta na forma de número decimal.

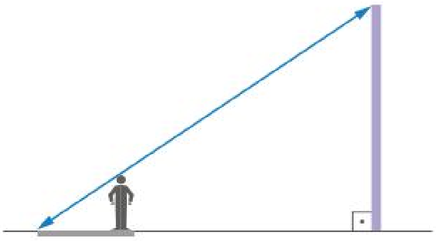



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**5.** Sabendo que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, qual é o valor de $x + y$?



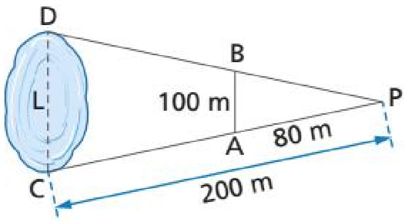
**6.** Uma pessoa está a 6,30 m da base de um poste, conforme nos mostra a figura.



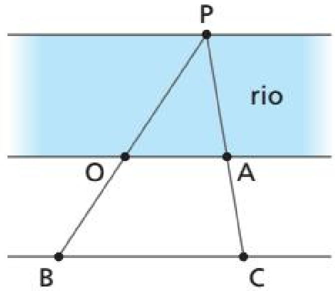
Sabendo que essa pessoa tem 1,80 m de altura e projeta uma sombra de 2,70 m de comprimento no solo, qual é a altura do poste?

**a)** 4,80 m
**b)** 6 m
**c)** 4,50 m
**d)** 6,4 m
**e)** 8 m

**7.** Para determinar a largura *L* de um lago, Paulo desenhou o esquema abaixo, em que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Que medida ele encontrou para a largura *L* do lago?



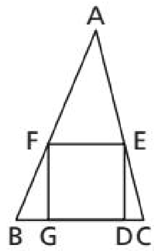

**8.** Um observador, situado em um ponto *O* da margem de um rio, precisava determinar, sem atravessar o rio, sua distância até o ponto *P*, localizado na outra margem. Para isso, marcou com estacas outros pontos do lado da margem em que se encontrava, de tal forma que *P*, *O* e *B* ficaram alinhados entre si e *P*, *A* e *C* também. Sabendo que $\overline{OA}$ é paralelo a $\overline{BC}$, OA = 25 m, BC = = 40 m e OB = 30 m, qual é a distância, em metro, do observador em *O* até o ponto *P*?




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**9.** (Mack-SP) No triângulo ABC da figura, o lado BC mede 4,5 e o lado do quadrado DEFG mede 3.

A altura do triângulo ABC, em relação ao lado BC, mede:

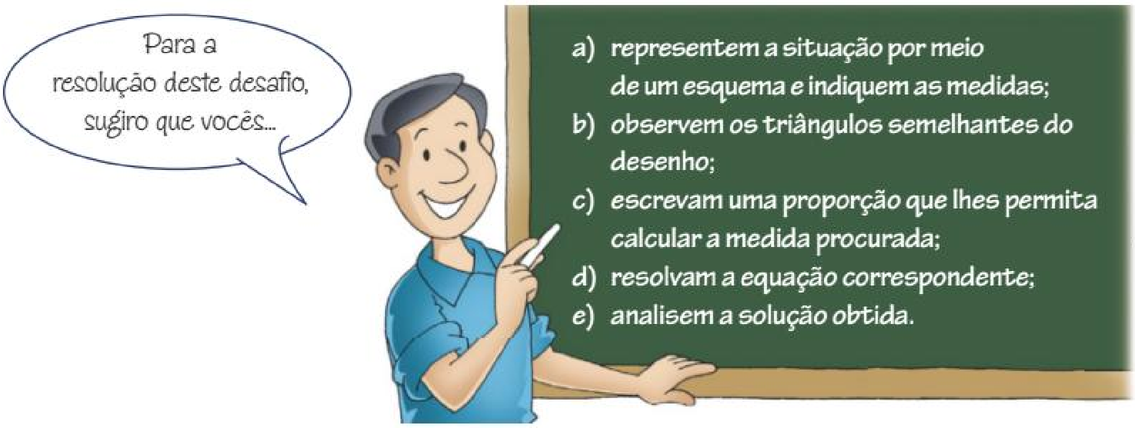



**a)** 7,5.
**b)** 8,0.
**c)** 8,5.
**d)** 9,0.
**e)** 9,5.

**DESAFIO**

**10.** Junte-se a um colega e resolvam o desafio a seguir.

(Unicamp-SP) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto, em Brasília, tem 4 m de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar 12,3 m sobre a rampa, está a 1,5 m de altura em relação ao solo. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.




MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

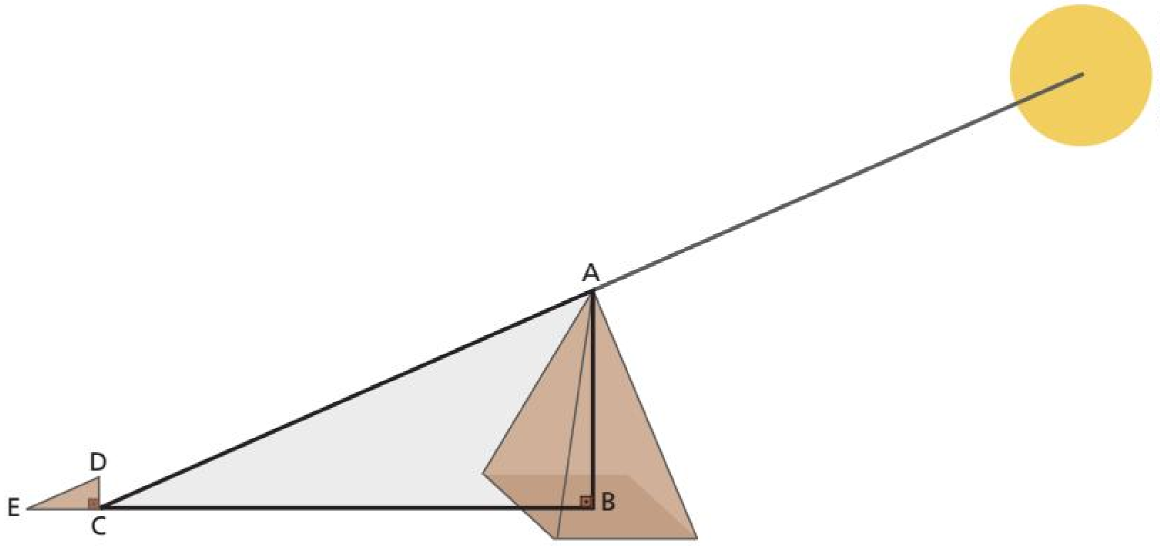
POR TODA PARTE

## O Cálculo para as alturas das pirâmides

Vimos no início da unidade sobre o fato de Tales ter sido desafiado a medir a altura da pirâmide de Quéops e que o teria feito com o auxílio de um bastão. Mas como será que ele o fez?

Há duas versões conhecidas para essa história. De acordo com Hicrônimos, um discípulo de Aristóteles, Tales aproveitou o momento do dia em que a medida do comprimento da nossa sombra é igual à medida da nossa altura para medir o comprimento da sombra da pirâmide e, assim, determinar sua altura.

A segunda versão, de Plutarco, diz que Tales fincou uma vara vertical no extremo da sombra projetada pela pirâmide, formando no solo dois triângulos semelhantes, conforme podemos ver na imagem.




Por meio desse método ele pôde determinar a altura da pirâmide ao saber que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}, \text{ logo } \overline{AB} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{BC}}{\overline{CE}}.$$

Depois, basta medir o comprimento das duas sombras e da altura da vara para se determinar a altura da pirâmide.

Responda à questão no caderno.

**1.** A pirâmide de Quéops (também conhecida como a grande pirâmide) é a mais alta das pirâmides do Egito. Logo após a sua construção, ela tinha a altura equivalente a um prédio de 50 andares. Por isso, conhecer a altura da pirâmide não era uma tarefa fácil.
Vimos no texto que, de acordo com a segunda versão da história, Tales utilizou conceitos geométricos para descobrir a altura da pirâmide de Quéops.
Suponha que, em determinado momento do dia, a sombra de uma pessoa, com 1,80 m, era de 5,40 m e, neste mesmo momento, a sombra da pirâmide de Quéops era de 438 m. Com esses dados, calcule a altura da pirâmide.

# RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

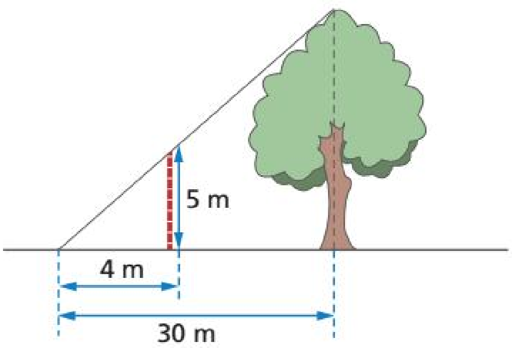
**1.** (Saresp) Um prédio projeta uma sombra de 40 m ao mesmo tempo em que um poste de 2 m projeta uma sombra de 5 m. Então, a altura do prédio é de:

**a)** 10 m. **c)** 14 m.
**b)** 12 m. **d)** 16 m.

**2.** Caio tem um carrinho de brinquedo que é uma miniatura do carro de seu pai. A razão entre o comprimento do carro do pai e o comprimento do carro de Caio é $\frac{14}{3}$. Se o carro de Caio tem 0,9 m de comprimento, qual é o comprimento do carro do pai de Caio?

**a)** 4 m **c)** 4,5 m **e)** 3,6 m
**b)** 4,2 m **d)** 4,8 m

**3.** Para determinar a altura de uma árvore, utilizou-se o esquema a seguir.



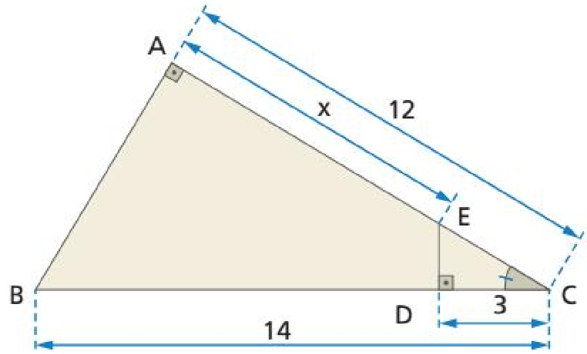

Nessas condições, qual é a altura da árvore?

**a)** 35 m **c)** 37,5 m **e)** 40 m
**b)** 36 cm **d)** 38,5 m

**4.** A porta de entrada e a fachada de uma casa são figuras retangulares semelhantes, e a razão de semelhança da altura da casa para a altura da porta é $\frac{5}{2}$. Se a altura da casa é 6,0 m, qual é a altura da porta?

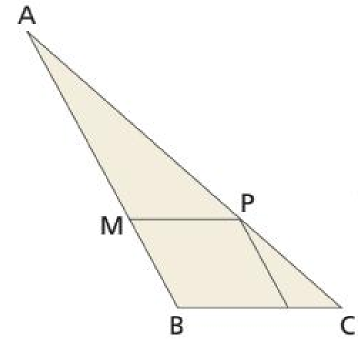
**a)** 2,4 m **c)** 3,2 m **e)** 1,8 m
**b)** 2,8 m **d)** 3,6 m

**5.** Considerando a figura abaixo, determine a medida $x$ indicada.




**a)** 9,5 **b)** 10 **c)** 8,8 **d)** 8,6 **e)** 8,5

**6.** Vamos considerar que, na figura a seguir, a medida do lado AB seja 20 cm, a medida do lado BC seja 5 cm, e o quadrilátero BCMP represente um losango, cujo lado mede $x$ cm.

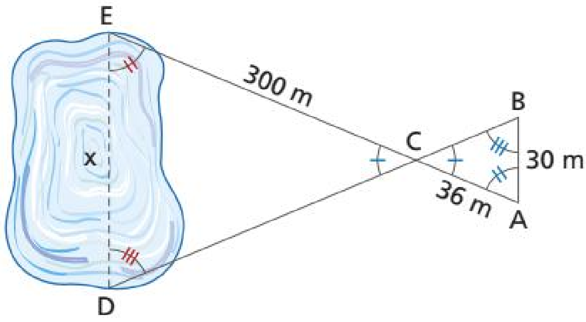



Nessas condições, qual é o perímetro do losango, em centímetro?

**a)** 12 **c)** 20 **e)** 24
**b)** 16 **d)** 18

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**7.** Para medir a largura $x$ de um lago, foi utilizado o esquema abaixo.



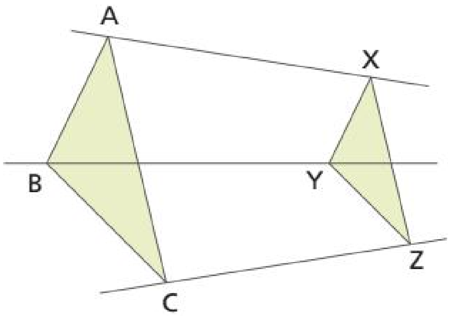

Nessas condições, obteve-se $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Determine a largura $x$ do lago.

**a)** 250 m **c)** 260 m **e)** 450 m
**b)** 400 m **d)** 360 m

**8.** Que altura tem uma árvore que projeta uma sombra de 10 m no mesmo instante em que uma pessoa de 1,60 m de altura projeta uma sombra de 2,50 m?

**a)** 6 m
**b)** 6,2 m
**c)** 6,4 m
**d)** 6,5 m
**e)** 7,2 m

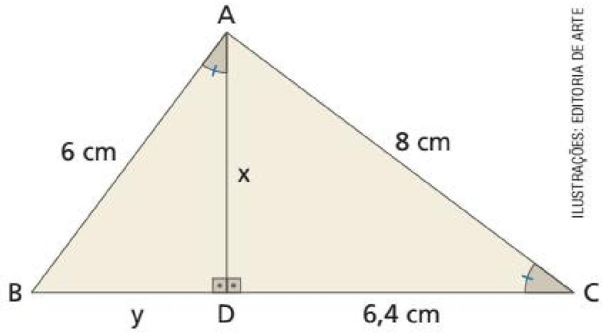
**9.** Os triângulos ABC e XYZ, representados a seguir, são semelhantes. No triângulo ABC, temos AB = 15 cm, BC = 18 cm e AC = 27 cm.




Se o perímetro do triângulo XYZ é 20 cm, qual é a medida do lado $\overline{XZ}$?

**a)** 5 cm
**b)** 6 cm
**c)** 7 cm
**d)** 8 cm
**e)** 9 cm

**10.** Na figura, a altura $\overline{AD}$ divide o $\triangle ABC$ em dois outros triângulos semelhantes: $\triangle ABD$ e $\triangle CAD$.

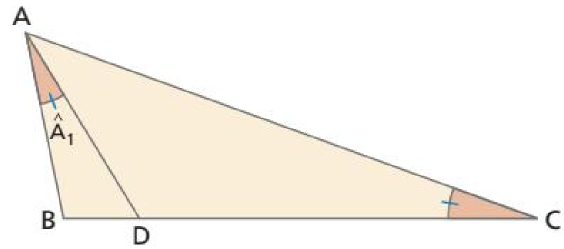



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Qual é o valor de x + y, em centímetro?

**a)** 9,1
**b)** 8,8
**c)** 8,4
**d)** 9,6
**e)** 8,2

**11.** Na figura abaixo, vamos considerar que AB = 4 cm e BC = 10 cm.




Nessas condições, a medida do lado BD é:

**a)** 0,9 cm
**b)** 1,2 cm
**c)** 1,4 cm
**d)** 1,6 cm
**e)** 1,8 cm

## UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos a semelhança (figuras semelhantes e triângulos semelhantes), com ênfase nas propriedades que envolvem esses tópicos.

Na abertura, exploramos uma característica das figuras semelhantes (constantemente aplicada na fotografia), que é a ampliação da imagem a uma mesma razão para que não haja distorção. Vamos retomar as aprendizagens desta Unidade e refletir respondendo às questões a seguir no caderno.

- Como você definiria dois polígonos semelhantes?
- Como sabemos se dois triângulos são ou não semelhantes?
- Qual é o teorema fundamental da semelhança de triângulos?
- Na abertura da Unidade você foi convidado a responder à pergunta: Quando duas figuras são semelhantes? Agora responda: o que são polígonos semelhantes?

# 6 PORCENTAGEM, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

## Você sabe o que é inflação?

Leia o texto a seguir.

A inflação, tecnicamente, é representada por um índice que mede como os preços, **de maneira geral**, estão variando na economia. Essa variação é representada em porcentagem e diz respeito à média dos preços em determinado período [...] "variação média do**s** preço**s**", ou seja, de **vários produtos**, e não de um só[...].

Por exemplo, se a inflação do mês de junho foi de 0,79%, quer dizer que os preços, **em média**, aumentaram 0,79% entre esse mês e o anterior. Outro exemplo: se a inflação de 2014 foi de 6,75%, então houve aumento **médio** acumulado de 6,75% entre o primeiro e o último dia do ano.

E os preços não sobem de maneira uniforme na economia: alguns produtos ficam mais caros e outros continuam custando mais ou menos o mesmo. Algumas coisas ficam até mais baratas. [...]

Fonte: POR QUÊ? ECONOMÊS EM BOM PORTUGUÊS. **O que é inflação?** Disponível em: <http://porque.uol.com.br/cards/o-que-e-inflacao/>. Acesso em: 9 nov. de 2018.

KHONGTHAMSHUTTERSTOCK.COM

Um dos índices que medem a variação média dos preços dos produtos é o IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), calculado pelo IBGE. Observe o gráfico do IPCA acumulado no período de outubro de 2017 a setembro de 2018.


EDITORIA DE ARTE

Fonte: ÍNDICES E INDICADORES. **Gráfico IPCA acumulado últimos 12 meses**. Disponível em: <http://www.indiceseindicadores.com.br/ipca/>. Acesso em: 8 nov. 2018.

Com base no texto e no gráfico, converse com os colegas e o professor para responder às questões a seguir.

- O que você sabe sobre inflação? Como você explicaria que o preço de um produto sofreu inflação em um período?
- Observando o gráfico do IPCA acumulado nesse período, qual foi a inflação verificada no mês de novembro de 2017?
- Nesse período, a maior variação do IPCA ocorreu entre quais meses consecutivos? De quanto foi essa variação?

CAPÍTULO 1

# PORCENTAGEM E PROBLEMAS ENVOLVENDO JUROS

## Juro simples

**Juro** é toda compensação em dinheiro que se paga ou que se recebe pela quantia em dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado.

O regime de capitalização a **juro simples** é aquele em que a taxa de juro é sempre aplicada sobre o capital inicial.

Considere a situação a seguir.

Uma máquina de lavar roupas custava R$ 1 500,00 à vista. João comprou essa máquina a prazo e só pagou 3 meses após o ato da compra. Sabendo que ele não deu nenhuma entrada e a taxa de reajuste foi de 5% ao mês a juro simples, quanto ele pagou por essa máquina?

Observe que o capital $C$ financiado foi de R$ 1 500,00 ($C = 1500$) a uma taxa $i$ de 5% ao mês ($i = 0{,}05$) por um período de tempo $t$ de 3 meses ($t = 3$).

Como foi utilizado juro simples, a taxa mensal é computada a cada mês sempre sobre o valor do capital. O preço a prazo é o montante $M$ (capital + juro) obtido ao final dos 3 meses. Então:

- juro ao final do 1º mês: $j_1 = 5\%$ de $1500 = 0{,}05 \cdot 1500 = 75$
- juro ao final do 2º mês: $j_2 = 5\%$ de $1500 = 0{,}05 \cdot 1500 = 75$
- juro ao final do 3º mês: $j_3 = 5\%$ de $1500 = 0{,}05 \cdot 1500 = 75$

Assim, o montante $M$ ao final dos 3 meses (preço pago a prazo) é dado por:

$$M = 1500 + 3 \cdot 75 = 1500 + 225 = 1725$$

Logo, o preço da máquina no pagamento a prazo foi de R$ 1 725,00.

Veja como podemos obter o juro total $j$ relativo aos 3 meses de uma só vez:

$j = j_1 + j_2 + j_3$

$j = 0{,}05 \cdot 1500 + 0{,}05 \cdot 1500 + 0{,}05 \cdot 1500$

$j = 1500 \cdot (0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05)$

$j = \underbrace{1500}_{C} \cdot \underbrace{3}_{T} \cdot \underbrace{0{,}05}_{I}$

$j = 225$

$$j = C \cdot i \cdot t$$

Sendo que a taxa de juro $i$ deve ser tomada na sua forma decimal e deve estar na mesma unidade de medida que o período de tempo $t$.

# Juro composto

O regime de capitalização a **juro composto** é aquele em que a taxa de juro é aplicada sobre o montante obtido a cada período de tempo considerado (ao dia, ao mês, ao ano etc.), sendo que inicialmente se aplica ao valor do capital (emprestado ou aplicado), mas é preciso expressar o período de tempo na mesma unidade da taxa. Acompanhe as situações a seguir.

**1** Ao aplicar R$ 100,00 a juro composto à taxa de 10% ao mês durante 3 meses, qual o montante obtido ao final desse período?

Observe que o capital aplicado foi $C = \text{R\$ } 100{,}00$, com $i = 5\%$ ao mês e $t = 3$ meses.

Como foi utilizado juro composto, a taxa mensal é computada a cada mês sobre o montante obtido ao final do mês anterior. Veja:

- juro ao final do 1º mês: $j_1 = 10\%$ de $100 = 0{,}1 \cdot 100 = 10$
  montante ao final do 1º mês: $M_1 = 100 + 10 = 110$
- juro ao final do 2º mês: $j_2 = 10\%$ de $110 = 0{,}1 \cdot 110 = 11$
  montante ao final do 2º mês: $M_2 = 110 + 11 = 121$
- juro ao final do 3º mês: $j_3 = 10\%$ de $121 = 0{,}1 \cdot 121 = 12{,}10$
  montante ao final do 3º mês: $M_3 = 121 + 12{,}10 = 133{,}10$

Logo, ao final dos 3 meses, o montante *M* é de R$ 133,10.

Note que para determinar o juro total desse período fazemos:

$j = M - C = 133{,}10 - 100{,}00 = 33{,}10$

Agora, veja como podemos obter o montante total *M* relativo aos 3 meses de uma só vez:

- $M_1 = 110 = \mathbf{1{,}1} \cdot 100$ ($M_1$ corresponde a 110% do capital)
- $M_2 = 121 = \mathbf{1{,}1} \cdot 1{,}1 \cdot 100$ ($M_2$ corresponde a 110% de $M_1$)
- $M_3 = 133{,}10 = \mathbf{1{,}1} \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 100$ ($M_3$ corresponde a 110% de $M_2$)

Assim, temos que o montante final *M* é dado por:

$M = (1{,}1)^3 \cdot 100 = 100 \cdot (1 + 0{,}1)^3$

Note que $1{,}1 = 1 + 0{,}1$, em que 0,1 é a taxa *i* dada na forma decimal, 3 é o período *t* da aplicação e 100 é o capital aplicado inicialmente. Ou seja, $\mathbf{M = C \cdot (1 + i)^t}$, sendo que a taxa de juro *i* deve ser tomada na sua forma decimal e deve estar na mesma unidade de medida que o período de tempo *t*.

**2** Durante um semestre Maria aplicou a juro composto a quantia de R$ 50 000,00 à taxa de 0,2% ao mês. Com o auxílio de uma calculadora, determine quanto foi o rendimento dessa aplicação no período considerado. Identificando as informações dadas, temos:

$C = 50\,000 \qquad i = 0{,}2\%$ ao mês $(i = 0{,}002) \qquad t = 1$ semestre $= 6$ meses

Portanto, o montante que Maria terá no final da aplicação é dado por:

$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 50\,000 \cdot (1 + 0{,}002)^6 \Rightarrow M = 50\,000 \cdot (1{,}002)^6$

$M \simeq 50\,000 \cdot 1{,}01206 \Rightarrow M = 50\,603$

O rendimento de uma aplicação corresponde à quantia de juro obtido nesse período, ou seja:

$$M - C = 50\,603 - 50\,000 = 603$$

Logo, o rendimento apurado foi de R$ 603,00.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Júlia aplicou R$ 600,00 com rendimentos mensais de 3% a juro simples. O montante relativo a essa aplicação será creditado na conta dela após 6 meses. Qual deve ser o valor creditado?

**2.** (Saresp) Suponha que um capital seja aplicado a juro simples, à taxa mensal de 8%. A fim de que seja possível resgatar-se o triplo da quantia aplicada, tal capital deverá ficar aplicado por um período mínimo de:

**a)** 2 anos e 1 mês.
**b)** 2 anos.
**c)** 1 ano e 2 meses.
**d)** 1 ano e 3 meses.

**3.** Paulo comprou um carro por R$ 45 000,00. No ato da compra, ele deu uma entrada de R$ 18 000,00 e o restante vai pagar depois de 3 meses com uma taxa de 4% ao mês a juro simples. Que quantia Paulo deve pagar ao final dos 3 meses?

PATHDOC/SHUTTERSTOCK.COM

Motorista com seu carro.

**4.** Dívidas apuradas pelo poder judiciário recebem juro de mora de 1% ao mês a juro simples, mais atualização monetária. Lucas ganhou uma ação no poder judiciário de R$ 5 000,00, valor já atualizado monetariamente, e vai receber depois de 2 anos. Qual é o montante que Lucas receberá?

**5.** Lilian aplicou R$ 1 500,00 a juro composto de 3% ao mês por 1 ano. Qual é o montante que ela vai receber ao final desse período?

**6.** De quantos por cento deve ser a taxa de juro mensal para que uma aplicação de R$ 8 000,00 a juro composto gere um montante de 64 000,00 ao final de 3 meses?

**7.** Fabiana fez um empréstimo de R$ 4 500,00 a juro composto com uma taxa de 1% ao ano para pagar ao final de 6 meses. Qual dos valores abaixo mais se aproxima do montante pago ao final desse período?

**a)** R$ 4 776,84
**b)** R$ 5 000,00
**c)** R$ 4 522,44
**d)** R$ 4 500,00

**8.** Para uma aplicação de R$ 1 000,00 com taxa de juro de 1% ao mês por um período de 12 meses, qual é a diferença entre os rendimentos obtidos, considerando o cálculo a juro composto e a juro simples?

### DESAFIO

**9.** Agora, junte-se com um colega e resolvam os desafios a seguir.

**a)** Jorge fez um empréstimo no banco no valor de RS 2 300,00 para pagar depois de 1 ano a juro simples de 5% ao mês. Passados 4 meses Jorge foi ao banco e pagou metade de sua dívida, já acrescida dos juros desse período. Qual é o valor que Jorge deverá pagar quando completar 1 ano de seu empréstimo?

**b)** Diana fez um empréstimo de R$ 1 100,00 para pagar em 4 parcelas mensais, sendo que 3 parcelas são iguais e sem juros e a última com juros simples de 5% ao mês. O total dos juros ela vai pagar junto com a última parcela. Qual é o valor de cada uma das três primeiras parcelas e do último pagamento?

CAPÍTULO 2

# PROBABILIDADE


VLADNIK/SHUTTERSTOCK.COM

Você já viu que a probabilidade P(A) de um evento A ocorrer é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis ao evento A}}{\text{total de resultados possíveis}}.$$

## Eventos dependentes e eventos independentes

Em um experimento aleatório:

Dois ou mais eventos são denominados **eventos independentes** quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros eventos terem ocorrido ou não.

Dados dois eventos independentes (*A* e *B*) de um espaço amostral, a probabilidade de eles ocorrerem sucessivamente é dada por **P(A e B) = P(A) · P(B)**.

Acompanhe as situações a seguir.

**1** Uma urna contém 10 bolas coloridas idênticas em massa e tamanho. Há 5 bolas azuis, 2 bolas verdes, 2 bolas amarelas e 1 bola vermelha. Sorteando-se uma dessas bolas (ao acaso) qual é a probabilidade de a bola sorteada ser azul?

Na urna, há **5** bolas azuis **em 10**, ou seja: P(bola ser azul) $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

- Sorteando-se duas dessas bolas (ao acaso), uma de cada vez, com reposição da bola sorteada, qual é a probabilidade de a segunda bola sorteada ser azul sabendo que a primeira foi vermelha?

  Note que a ocorrência do evento "sair bola azul" não depende da ocorrência ou não do evento "sair bola vermelha", já que há reposição da bola retirada na urna, ou seja, nesse caso esses dois **eventos** são **independentes**; continuamos, então, com **5 em 10** para as azuis.

  $$\text{P(sair bola azul, sabendo que saiu vermelha)} = \text{P(sair bola azul)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- Qual é a probabilidade de a primeira bola sorteada ser azul e a segunda ser vermelha?

  Como nesse caso esses eventos são independentes, temos:

  P(primeira azul e segunda vermelha) = P(ser azul) · P(ser vermelha) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$

- Sorteando-se seguidamente duas dessas bolas (ao acaso) sem reposição, qual é a probabilidade de a segunda bola sorteada ser azul sabendo que a primeira foi vermelha?

  Note que a primeira bola foi vermelha e não houve reposição na urna. Assim, no sorteio da segunda bola, a urna tem uma composição diferente: agora há **9** bolas: **5** azuis, **2** verdes e **2** amarelas. Logo, são **5** bolas azuis **em** um total de **9** bolas, ou seja:

  P(sair bola azul, sabendo que saiu vermelha) $= \frac{5}{9}\left(\text{um pouco maior que } \frac{1}{2}\right)$.

  Desse modo, a ocorrência do evento "sair bola vermelha" influenciou a ocorrência do evento "sair bola azul" e, por isso, dizemos que esses eventos são **eventos dependentes**.

  No caso de dois eventos dependentes ($A$ e $B$) de um espaço amostral, a probabilidade de eles ocorrerem sucessivamente é dada por:

  $$\mathbf{P(A \text{ e } B) = P(B \text{ e } A) = P(A \text{ dado que } B \text{ ocorreu}) \cdot P(B)}$$

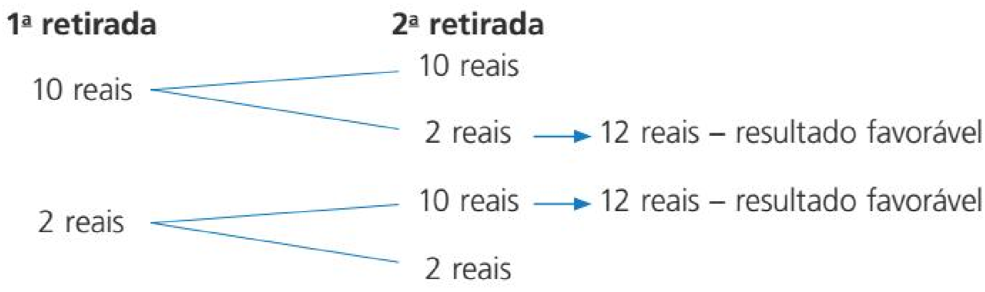
  Qual é a probabilidade de a primeira bola sorteada ser vermelha e a segunda ser azul?

  Como nesse caso esses eventos são dependentes, temos:

  P($1^{a}$ vermelha e $2^{a}$ azul) = P(bola azul sabendo que saiu vermelha) · P(vermelha) $= \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{10} =$
  $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$

**2** Joana tem na bolsa 3 cédulas de 2 reais e 2 cédulas de 10 reais. Qual é a probabilidade de ao retirar duas cédulas ao acaso, sucessivamente, da bolsa ela obtenha a quantia de 12 reais?

Vamos fazer uma árvore de possibilidades para a situação:




Vamos montar um quadro com as respectivas probabilidades para os resultados favoráveis, verificando que os eventos envolvidos são dependentes, já que não há reposição da cédula retirada.

| $1^{a}$ retirada | $2^{a}$ retirada | Retiradas sucessivas |
|---|---|---|
| P(10 reais) $= \frac{2}{5}$ | P(sair 2 reais sabendo que saiu 10 reais) $= \frac{3}{4}$ | P(sair 2 reais e 10 reais) = $= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 30\%$ |
| P(2 reais) $= \frac{3}{5}$ | P(sair 10 reais sabendo que saiu 2 reais) $= \frac{2}{4}$ | P(sair 10 reais e 2 reais) = $= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 30\%$ |

Note que há duas maneiras de se obter 12 reais. Logo, devemos somar as probabilidades dessas duas maneiras:

$$P(12 \text{ reais}) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = 60\%$$

Logo, a probabilidade de Joana conseguir 12 reais retirando duas cédulas ao acaso é de 60%.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Se uma pessoa jogar um dado cúbico honesto (dado comum) com as faces numeradas de 1 a 6, qual é a probabilidade de sair o número 4? E de sair um número ímpar?

**2.** Em uma urna há 8 bolas idênticas, numeradas de 1 a 8. Qual é a probabilidade de se retirar ao acaso:

**a)** a bola com o número 1?

**b)** uma bola com número par?

**c)** a bola com o número 1 e, em seguida, retirar uma bola com número par, repondo a bola retirada na urna?

**3.** Jogando duas vezes um dado comum, a probabilidade de se obter dois números ímpares é:

**a)** 0,5.

**b)** 0,75.

**c)** 1.

**d)** 0,25.

**4.** Em uma urna há 16 bolas idênticas, mas de cores diferentes: 4 vermelhas, 4 azuis, 4 verdes e 4 amarelas. Sorteando-se duas bolas sucessivamente e sem reposição, determine a probabilidade de a segunda bola sorteada ser amarela, sabendo que a primeira bola foi azul.

**5.** Em um bingo beneficente, as bolinhas são numeradas de 01 a 75. Expresse na forma percentual a probabilidade de as duas primeiras bolinhas sorteadas (sem reposição) apresentarem número par.

**6.** Um baralho comum tem 52 cartas divididas em 4 naipes (ouros, paus, espadas e copas). Sorteando-se (ao acaso) duas cartas, sem reposição:

**a)** qual é a probabilidade de se obterem duas cartas de paus?

**b)** qual é a probabilidade de se obterem duas cartas de mesmo naipe?

**7.** Na bolsa de Clélia há 3 cédulas de 10 reais e 4 cédulas de 5 reais. Se ela retirar duas cédulas ao acaso da bolsa, qual é a probabilidade de sairem duas cédulas de mesmo valor?

**8.** No lançamento simultâneo de três dados comuns e de cores diferentes, qual é a probabilidade de sair o mesmo número nos três dados?

CHEN_108/ SHUTTERSTOCK. COM

**9.** Em uma urna há 16 bolas iguais no tamanho e massa, 15 delas são brancas e uma é vermelha. Retirando-se ao acaso 3 bolas dessa urna, sucessivamente e sem reposição, a probabilidade de conseguir retirar a bola vermelha é maior que, menor que ou igual a 20%?

### DESAFIO

**10.** Agora, junte-se com um colega e resolva o **desafio** a seguir.

A abertura de um jogo de xadrez (primeiro movimento do jogo) só pode ser realizado por duas peças: o peão ou o cavalo. Se o jogo for iniciado por um peão, essa peça tem duas opções de movimento (para frente avançando uma ou duas casas). Por sua vez, se o jogo for inicializado pelo cavalo, também há duas opções de movimento (L à esquerda ou L à direita). Além disso, uma rodada é finalizada quando ambos os jogadores concluem o seu movimento.

Quantas primeiras rodadas distintas podem existir em um jogo de xadrez?

CHRISTOS GEORGHIOU /SHUTTERSTOCK.COM

CAPÍTULO 3

# ANALISANDO GRÁFICOS

A Estatística está presente em áreas do conhecimento que envolvem planejamento de experimentos, coleta, processamento e organização de dados e análise, interpretação e comunicação das informações obtidas.

Os gráficos são recursos importantes utilizados para a comunicação dos dados coletados, comparando informações quantitativas ou qualitativas.

Ao longo de seus estudos você já lidou com vários tipos de gráfico, que têm diferentes funções.

- Gráficos de **composição**: mostram componentes de um todo. Exemplo:
  **Gráfico de setores:** circular, formado por fatias que somadas compõem 100% do círculo. Existe uma relação de proporcionalidade de cada fatia (setor) com o todo (o círculo).
- Gráficos de **comparação**: confrontam dados entre várias categorias ou ao longo do tempo. Exemplos:
  **Gráfico de barras ou de colunas**: compara dados entre várias categorias e entre itens individuais.
  **Gráfico de linhas**: compara dados (lineares) ao longo do tempo, ou seja, mostra a evolução de uma ou mais variáveis ao longo do tempo.

Depois de escolher o gráfico adequado para a apresentação do conjunto de dados que se tem, devemos pensar na melhor maneira para facilitar a leitura e interpretação dele pelo leitor, escolhendo adequadamente o título do gráfico, os títulos dos eixos, as unidades apropriadas etc.

Vamos analisar as situações a seguir.

**1** Uma empresa de exportação fechou seu balanço de final de ano. Para simplificar o relatório, o gerente de contabilidade apresentou um gráfico para mostrar quais produtos foram exportados e a quantidade relativa de cada um, durante o ano passado.

Nesse caso foram indicados os componentes das exportações num período fixo (o ano passado). O gráfico mais adequado para isso é o **gráfico de setores**. Veja a seguir.


Fonte: Contabilidade da empresa.

Analisando o gráfico, podemos visualizar os itens de exportação e o percentual com que cada item contribuiu no total das exportações da empresa. Assim, verificamos que o produto que mais contribuiu nessa exportação foram os itens automotivos, que correspondem à maior fatia (maior percentual). Esse é o produto **modal** (dado de maior frequência) dessa distribuição. Como o total equivale a 100%, a soma das porcentagens de cada item deve ser 100%. Por exemplo, se a receita total apurada por essa exportação anual foi de 90 milhões de reais, o item brinquedos foi responsável por 18 milhões de reais (20% de 90 milhões).

**2** Um *site* especializado em informações sobre vendas de automóveis no Brasil mantém uma lista com a quantidade de automóveis vendidos, por marca, que atingiu, pelo menos 100 mil unidades vendidas no ano de 2017. Para facilitar essa informação, foi construído um **gráfico de barras horizontais**. Veja:


Fonte: <https://www.autoo.com.br/emplacamentos/marcas-mais-vendidas/2017/>. Acesso em: 2 nov. 2018.

Com base no gráfico, vamos responder às seguintes perguntas:

a) Qual marca de carro vendeu mais unidades de veículos em 2017?

O comprimento de cada barra deve ser proporcional à quantidade de unidade vendida correspondente. Assim, a barra mais comprida indica a maior venda, ou seja, a Chevrolet foi a marca que mais vendeu carros no Brasil em 2017.

b) Quantos veículos a mais a Honda deveria vender para igualar à venda do 1º colocado em vendas em 2017?

Como a maior quantidade vendida foi 394 mil veículos, a Honda deveria vender esse mesmo valor para se igualar ao primeiro colocado. Analisando o gráfico, a Honda vendeu 131 mil unidades. Vamos calcular quanto falta para 131 mil atingir 394 mil, ou seja:

$$394 \text{ mil} - 131 \text{ mil} = 263 \text{ mil}$$

Logo, a Honda deveria vender mais 263 mil veículos.

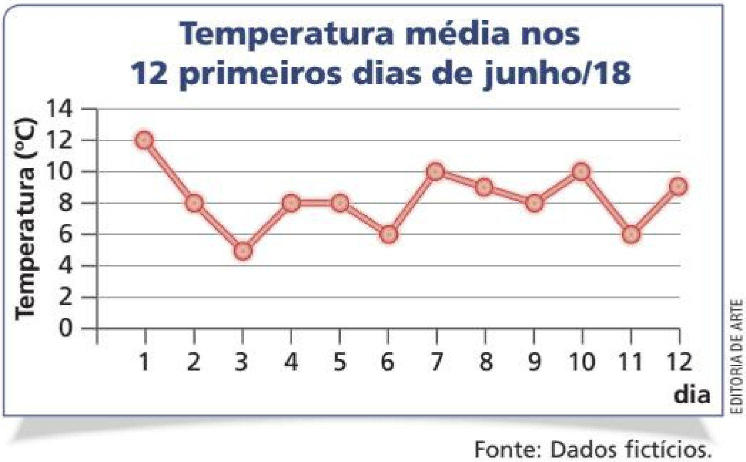
c) Levando em conta apenas as marcas de veículos dada pelo gráfico, qual é a média de unidades vendidas por marca?

A média de unidades vendidas, em milhares, é dada por:

- média $= \dfrac{272 + 190 + 167 + 202 + 131 + 207 + 291 + 394}{8} = \dfrac{1\,854}{8} = 231{,}75$ milhares de unidades $= 231\,750$ unidades

Logo, cada montadora vendeu em média 231 750 veículos em 2017.

**3** Uma cidade do sul do país registrou a temperatura média durante os 12 primeiros dias do mês de junho de 2018 e com esses dados construiu um gráfico. Esse gráfico mostra a evolução das temperaturas médias ao longo dos 12 primeiros dias do mês. O melhor tipo de gráfico para isso é o **gráfico de linhas**. Observe.



Fonte: Dados fictícios.

Observando o gráfico, observamos a temperatura média de cada dia. Registrando esses dados em ordem crescente, podemos calcular as medidas de tendência central:

5 °C 6 °C 6 °C 8 °C 8 °C **8 °C** **8 °C** 9 °C 9 °C 10 °C 10 °C 12 °C

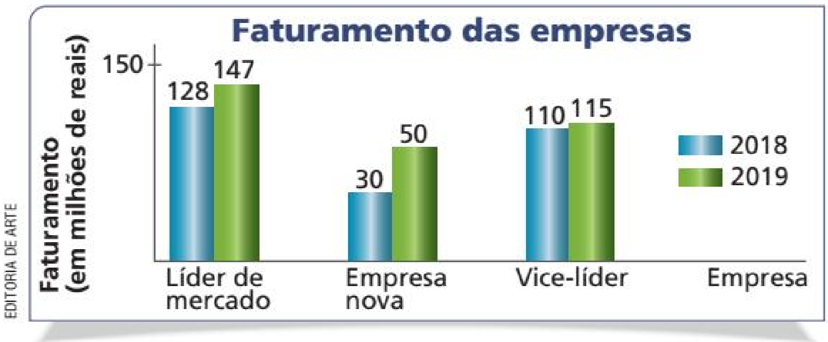
- Como há 12 elementos (número par), a **mediana**, nesse caso, é a média entre os dois elementos centrais (**8** e **8**), que é 8. Logo, o valor mediano é 8.
- A **moda** é o número que mais aparece; logo, a moda é 8.
- A **média** é a soma de todos os valores divididos pelo total de elementos (12):

$$\text{média} = \frac{5 + 6 + 6 + 8 + 8 + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 + 10 + 12}{12} = 8{,}25$$

Logo, o valor médio é 8,25 °C.

**4** Os gráficos são ótimos recursos para a comunicação de informações, mas precisam ser apresentados e analisados corretamente. No entanto, podem causar falsas impressões com manipulações simples como uso de escalas diferentes ou não iniciar pelo zero.

Vamos analisar o **gráfico de colunas duplas** a seguir, que se refere à comparação do faturamento da empresa Nova com as duas principais concorrentes, em dois anos seguidos.



Fonte: Empresa Nova.

Para dar a impressão visual que a Empresa Nova está se aproximando do faturamento das concorrentes, as colunas que se referem a ela **não estão na proporção correta**.

É possível observar que a altura da coluna verde da Empresa Nova (relativa ao ano 2019) está fora de proporção; ela corresponde a mais da metade da escala do eixo vertical, o que é uma incorreção, pois, como a metade é 75, a coluna que indica 50 deveria corresponder a menos da metade. Note também que, se dobrarmos a altura da coluna verde (50) dessa empresa, ela se tornará bem maior do que a coluna azul da empresa vice-líder (110), o que caracteriza outro equívoco.

## Os gráficos no dia a dia

Já vimos como os gráficos são importantes para analisar comportamentos, metas, recursos e desempenho de uma empresa, de um projeto ou até mesmo de um governo.

Na área econômica, eles ajudam nos balanços financeiros, na aplicação de recursos ou na cotação de moedas e produtos. Na mídia são muito comuns para ilustrar ou complementar a informação tratada.

Responda às questões no caderno.

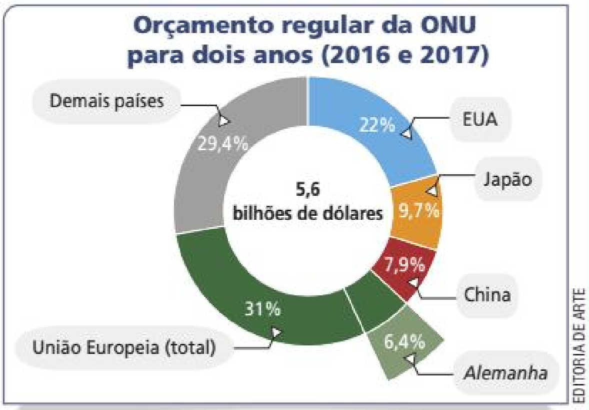
**1.** O gráfico a seguir mostra a cotação do ouro fornecida pelo *site* Bullion Rates (https://pt.bullion-rates.com/gold/BRL/Year-1-chart.htm) de outubro de 2017 a outubro de 2018. Ele é um gráfico de linhas com base em dados diários da cotação do ouro para o Brasil.


Fonte: BULLION RATES. **Cotação do ouro.** Disponível em: <https://pt.bullion-rates.com/gold/BRL/Year-1-chart.htm>. Acesso em: 15 out. 2018.

**a)** Qual a cotação aproximada do ouro no início de novembro de 2017? E no início de junho de 2018?

**b)** Calcule a valorização do grama de ouro, em reais e em porcentagem, do início de novembro de 2017 para o início de junho de 2018.

**2.** A Organização das Nações Unidas (ONU) é uma organização internacional fundada ao final da Segunda Guerra Mundial com o objetivo de facilitar o diálogo entre os países, a cooperação em termos de direito e segurança internacional, direitos humanos e da paz mundial. O gráfico mostra como está distribuído o custeio do orçamento regular da ONU, em que o montante regular pago pelos EUA equivale a 5,6 bilhões de dólares.




Fonte: QUEM paga a conta da ONU. **D.W.** Disponível em: <https://www.dw.com/pt-br/quem-paga-a-conta-da-onu/a-40590789?maca=bra-rss-br-all-1030-rdf>. Acesso em: 15 out. 2018.

**a)** Esse gráfico mostra componentes de um todo ou a evolução de uma variação ao longo do tempo?

**b)** A figura utilizada para montar o gráfico é uma coroa circular; é uma variação do gráfico de setores. O que deve ocorrer quando somamos os valores das partes que compõem um gráfico desse tipo? Verifique se isso ocorre nesse gráfico.

**c)** Explique o significado da porcentagem 6,4% indicada no gráfico.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Para a eleição de prefeito de Perisópolis, um instituto de pesquisa colheu dados sobre a intenção de votos dos habitantes dessa cidade nos últimos 8 meses. Com base nesses dados, o instituto vai publicar um gráfico que mostra a evolução da intenção de votos para cada candidato nos últimos 8 meses. Qual é o tipo de gráfico mais adequado para apresentar essa situação?

**a)** Um gráfico de setores é mais apropriado por apresentar vários períodos.

**b)** Um gráfico de barras múltiplas é o mais indicado, pois compara vários itens (meses).

**c)** Um gráfico de colunas simples é o mais indicado, pois há várias categorias.

**d)** Um gráfico de linhas é o mais indicado por mostrar uma evolução ao longo do tempo.

**2.** A professora Iara perguntou a cada um de seus alunos qual é o animal de que mais gosta e organizou o resultado na tabela abaixo.

**Animal preferido**

| Tipo de animal | Quantidade de votos |
|---|---|
| Cachorro | 32 |
| Cobra | 1 |
| Coelho | 6 |
| Gato | 25 |
| *Hamster* | 3 |
| Pássaro | 8 |
| Tartaruga | 3 |

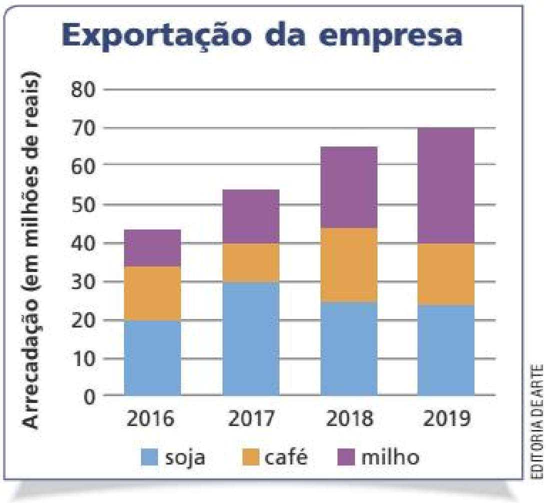
Fonte: Alunos da professora Iara.

**a)** Qual o tipo de gráfico que devemos apresentar os dados obtidos nessa pesquisa?

**b)** Construa, no caderno, o gráfico relativo aos dados dessa pesquisa, usando o tipo que você indicou no item anterior.

**3.** Um gráfico de **colunas empilhadas** é aquele em que cada coluna é subdividida em partes coloridas posicionadas em cima umas das outras: cada coluna representa uma categoria e cada parte da coluna representa uma subcategoria. É um gráfico de composição, pois relaciona partes com o todo, em que a composição varia ao longo do tempo. As alturas das partes de coluna representam a contribuição de diferentes componentes para o valor numérico que compõe a altura da respectiva coluna.

Uma empresa de exportação de alimentos (soja, café e milho) apresentou o seguinte gráfico de colunas empilhadas:




Fonte: Diretoria da empresa.

**a)** Explique o significado de cada parte colorida em cada coluna.

**b)** É possível identificar se a arrecadação pela exportação de algum dos três produtos sempre aumentou de um ano para outro? Que produto foi esse?

**c)** Em que ano a exportação de cada um dos produtos teve a maior arrecadação?

**d)** Em que ano a soja foi responsável por mais da metade da arrecadação da exportação?

CAPÍTULO 4

# ELABORANDO UMA PESQUISA

Você já observou que há diferentes tipos de pesquisa? Nem todas as pesquisas utilizam conhecimentos estatísticos como, por exemplo, quando você pesquisa um assunto (em diversas fontes confiáveis) para compor um trabalho escolar. No entanto, as pesquisas em estudos estatísticos são muito importantes, pois fornecem dados que, depois de organizados e analisados, podem nortear planejamentos de mudanças acerca do assunto pesquisado.

Em nosso dia a dia, são muito comuns pesquisas de opinião (servem para apontar informações sobre produtos e serviços utilizados pelo público, opiniões de pessoas sobre determinado assunto etc.) e pesquisas de mercado (servem para conhecer o perfil do cliente, perceber estratégias de concorrentes, analisar fornecedores, entre outros).

Uma pesquisa pode coletar dados de toda a **população estatística**, ou seja, coletamos os dados de todos os indivíduos de interesse, como acontece no Censo. No Brasil, o Censo Demográfico ocorre normalmente de 10 em 10 anos e todas as residências do Brasil são entrevistadas.

Na maioria das pesquisas, no entanto, os dados são coletados em uma amostra (grupo representativo da população). Nesse caso, dizemos que é uma pesquisa por amostragem. Para esse tipo de pesquisa fazemos um estudo prévio dos indivíduos de interesse e os separamos em grupos com afinidades como, por exemplo: crianças, jovens, adultos e idosos; ou estudantes, desempregados, trabalhadores e aposentados.

Para que possamos extrapolar os dados e conclusões obtidas no estudo da amostra para a população de interesse, ela deve ser uma amostra significativa.


BAKHTIAR ZEIN/ SHUTTERSTOCK.COM

**SAIBA QUE**

A escolha do tamanho da amostra para que ela seja confiável depende de vários fatores: tamanho da população, margem de erro que se deseja, nível de confiabilidade, entre outros.

Por exemplo, para um universo de 10 000 indivíduos (população) e margem de erro de 5%, precisamos de uma amostra com no mínimo cerca de 400 indivíduos.

De modo simplificado, os passos de uma pesquisa são:

- levantamento dos objetivos e determinação da população;
- coleta e organização dos dados;
- construção de tabelas e gráficos;
- leitura e interpretação dos gráficos;
- registro das conclusões.

Acompanhe a situação a seguir.

Alunos da Faculdade de Educação fizeram uma pesquisa sobre qual área os jovens estudantes da cidade de São Paulo querem seguir na faculdade.

Para isso, eles dividiram as carreiras universitárias em cinco áreas:

- **Engenharia**: englobando todos os tipos de engenharia e arquitetura;
- **Ciências médicas**: englobando Medicina, Veterinária, Odontologia, Nutrição, Psicologia, Biologia etc.;
- **Ciências exatas**: englobando Matemática, Física, Química, Ciência da Computação etc.;
- **Ciências humanas**: englobando Direito, Jornalismo, Letras, Artes, Administração etc.;
- **Ciências Sociais**: englobando História, Geografia, Sociologia, Filosofia etc.

**1ª parte da pesquisa**

- Fixar o objetivo: Mapear área das carreiras escolhidas pelos estudantes de São Paulo.
- Reconhecer a população a ser pesquisada: Todos os jovens de São Paulo que vão prestar vestibular no corrente ano.
- Determinar o método de pesquisa: Por amostragem, entrevistando jovens que estão cursando o último ano do Ensino Médio de variadas escolas de São Paulo (públicas e privadas).
- Calcular o tamanho da amostra e determinar locais da pesquisa: Segundo o *site* QEdu (http://qedu.org.br), a cidade de São Paulo tem cerca de 6 700 escolas e 140 000 estudantes no 3º ano do Ensino Médio. Sendo assim, foi considerada uma amostra confiável com 600 indivíduos (300 do sexo masculino e 300 do sexo feminino), composta de 20 alunos de 30 escolas espalhadas pelas regiões norte, sul, centro, leste e oeste da cidade de São Paulo, sorteados ao acaso.

**2ª parte da pesquisa**

- Coletar os dados: Uma equipe de 8 estudantes visitou as escolas em todas as regiões e colheram os dados. Cada estudante entrevistado indicou apenas uma das cinco áreas determinadas anteriormente.

**3ª parte da pesquisa**

- Organizar os dados em uma tabela: Segundo os dados coletados, a equipe de elaboração da pesquisa montou uma tabela de dupla entrada.

**Escolha da carreira**

| Carreira / Sexo | Engenharia | Ciências médicas | Ciências exatas | Ciências humanas | Ciências sociais | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Masculino | 100 | 30 | 56 | 90 | 24 | 300 |
| Feminino | 60 | 48 | 110 | 38 | 44 | 300 |
| Total | 160 | 78 | 166 | 128 | 68 | 600 |

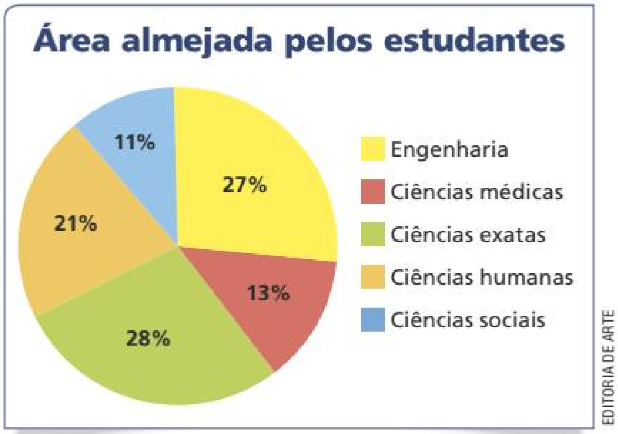
Fonte: Pesquisa dos alunos da Faculdade de Educação.

- Extrair medidas e informações dos dados organizados: Podemos calcular algumas medidas estatísticas relativas a essa distribuição como, por exemplo, a **média de estudantes por área** (razão entre o total de estudantes pesquisados e a quantidade de áreas), a **moda das áreas** (área almejada por mais estudantes), **amplitude** (diferença entre as quantidades da área mais indicada e da área menos indicada); e outras informações relevantes como a **área menos procurada** etc.

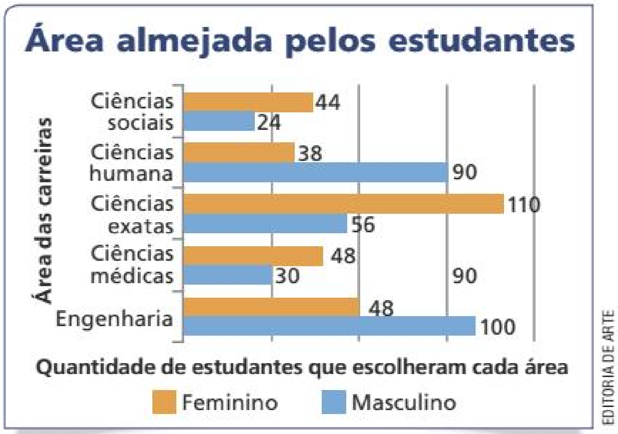
Foi montado um quadro com esses cálculos:

| Entre todos os estudantes | Entre o sexo feminino | Entre o sexo masculino |
|---|---|---|
| Média:<br>120 estudantes por área $\left(\frac{600}{5}\right)$ | Média:<br>60 alunas por área $\left(\frac{300}{5}\right)$ | Média:<br>60 alunos por área $\left(\frac{300}{5}\right)$ |
| Moda: Ciências exatas | Moda: Ciências exatas | Moda: Engenharia |
| Amplitude:<br>98 estudantes (166 – 68) | Amplitude:<br>72 alunas (110 – 38) | Amplitude:<br>76 alunos (100 – 24) |
| Área menos procurada:<br>Ciências sociais | Área menos procurada:<br>Ciências humanas | Área menos procurada:<br>Ciências sociais |

- Construir gráficos relevantes para comunicar os resultados: Para mostrar a composição de cada área escolhida em relação ao todo foi feito um **gráfico de setores**, e para comparar o número de interessados em cada área foi apresentado um **gráfico de barras duplas**.




Fonte: Pesquisa dos alunos da Faculdade de Educação.




Fonte: Pesquisa dos alunos da Faculdade de Educação.

Analisando os gráficos podemos obter informações variadas, como por exemplo, nesse ano, a área de Ciências exatas foi mais escolhida do que as áreas de Ciências médicas e Ciências sociais juntas.

**4ª parte da pesquisa**

- Fazer relatório para comunicar resultados e planejar ações: O relatório deve ser o mais detalhado possível e deve conter a descrição das etapas da pesquisa, o objetivo, população alvo, especificação da amostra, tabelas e gráficos para mostrar os dados organizados e processados, registro de informações relevantes, medidas estatísticas calculadas e analisadas, conclusões finais e propostas para ações que podem ser tomadas com base nas conclusões, se for o caso.

## ATIVIDADE

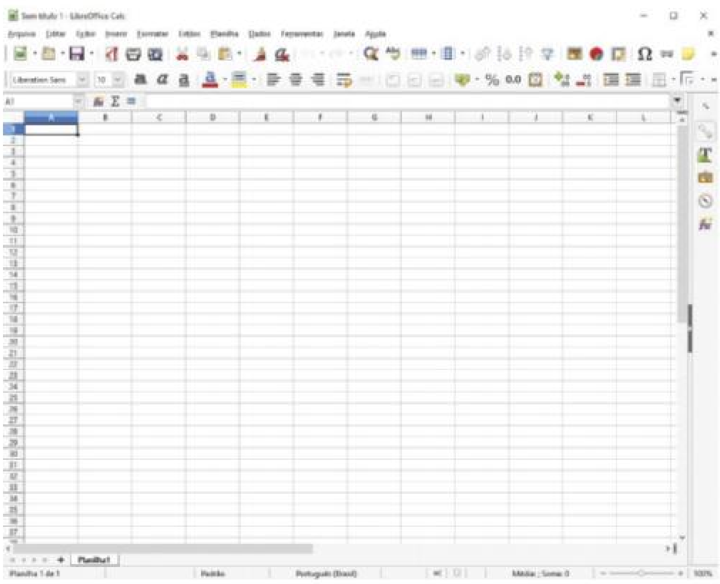
Responda às questões no caderno.

**1.** Considerando a situação descrita anteriormente sobre a pesquisa das áreas escolhidas pelos estudantes da cidade de São Paulo, os gráficos apresentados foram adequados para o que se queria mostrar?

TECNOLOGIAS

## Planilhas eletrônicas e gráficos estatísticos

As planilhas eletrônicas são tabelas de cálculos que podem ter seus dados manipulados para operações lógicas, estatísticas e de cálculos em geral, incluindo montagem de tabelas e construção de gráficos estatísticos dos mais variados tipos.



O Libreoffice é um conjunto completo de *softwares* para uso doméstico ou em escritórios. Existem versões em mais de 20 idiomas, inclusive para o português, nos principais sistemas operacionais (Linux, Windows etc.). Para baixar gratuitamente, pode-se usar um *link* disponível em: <http://livro.pro/bixzay> (acesso em: 9 nov. 2018).

O *software* LibreOffice Calc é uma planilha eletrônica do pacote de programas LibreOffice. Veja a imagem ao lado.

O uso da planilha eletrônica é bastante intuitivo. Montamos na página do programa uma tabela como fazemos no papel.

No exemplo abaixo, digitamos os dados da tabela nas células da planilha, no mesmo formato.

**Quantidade de árvores frutíferas da fazenda**

| Fruta \ Ano | 2018 | 2019 |
|---|---|---|
| Banana | 20 | 15 |
| Laranja | 20 | 30 |
| Mamão | 15 | 10 |
| Manga | 10 | 15 |

Fonte: Gerência da fazenda.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | Ano 2018 | Ano 2019 | |
| 3 | | Banana | 20 | 15 | |
| 4 | | Laranja | 20 | 30 | |
| 5 | | Mamão | 15 | 10 | |
| 6 | | Manga | 10 | 15 | |
| 7 | | | | | |

IMAGENS: LIBREOFFICE 2018

Depois de digitar os dados, se quiser destacá-los, selecione as células e use a "função Bordas" (Figura 1). Após clicar no botão indicado, a nossa tabela ficará com as bordas (Figura 2). Veja a imagem a seguir:

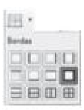
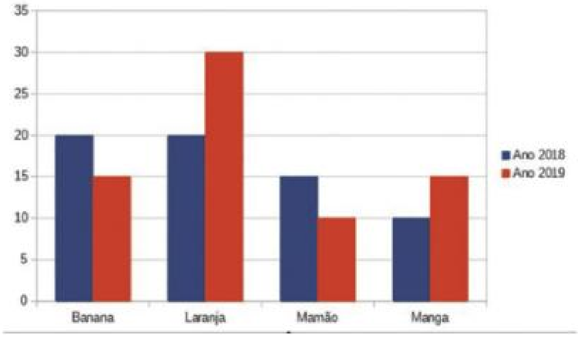



Figura 1.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | Ano 2018 | Ano 2019 | |
| 3 | | Banana | 20 | 15 | |
| 4 | | Laranja | 20 | 30 | |
| 5 | | Mamão | 15 | 10 | |
| 6 | | Manga | 10 | 15 | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |

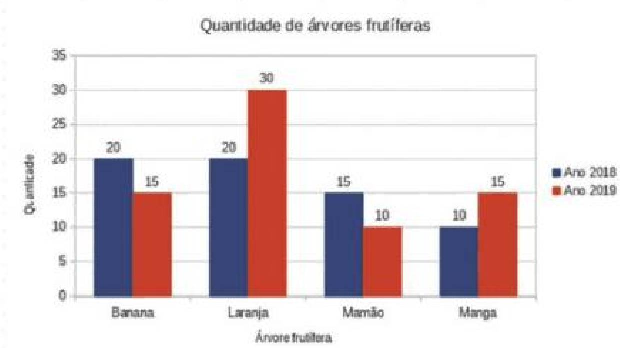
Figura 2.

Para inserir o gráfico correspondente à tabela construída, selecione a tabela (com o botão esquerdo do *mouse*) e dentro da aba "Inserir" selecione "Gráfico..." e depois escolha o tipo de gráfico. Como exemplo, vamos selecionar o gráfico de colunas múltiplas. Veja o resultado na imagem.




GRÁFICOS: LIBREOFFICE 2018

Clicando com o *mouse* sobre a região do gráfico a ser editada, podemos mudar a cor das colunas, acrescentar rótulo de dados (valor acima de cada coluna), colocar título para os eixos etc., obtendo assim o gráfico abaixo, por exemplo.




Agora, com o auxílio do *software* LibreOffice Calc (ou de um outro), resolva as questões.

**1.** Foi feita uma pesquisa eleitoral com os três candidatos a prefeito e foram obtidos os dados da tabela abaixo, com os percentuais de intenção de votos.

**Pesquisa para prefeito – intenções de voto**

| Candidato \ Mês | Janeiro | Março | Maio | Julho | Setembro |
|---|---|---|---|---|---|
| Candidato A | 10% | 15% | 20% | 30% | 45% |
| Candidato B | 30% | 25% | 25% | 20% | 25% |
| Candidato C | 40% | 35% | 35% | 30% | 20% |

Fonte: Instituto de pesquisa.

**a)** Reproduza essa tabela na planilha eletrônica e construa, nessa planilha, o gráfico de linhas triplas correspondente, colocando rótulo de dados, títulos dos eixos e do gráfico.

**b)** Observe o gráfico e verifique se as intenções de voto de algum candidato só cresceram ou só decresceram no período e quais foram esses candidatos.

**2.** Faça uma pesquisa no quarteirão em que você mora (de casa em casa), perguntando a quantidade de moradores de cada casa. Em seguida, registre esses dados em uma planilha eletrônica e construa o gráfico de barras correspondente. Converse com seu professor e seus responsáveis sobre como proceder durante a coleta dos dados.

# RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

**1.** Luíza comprou uma geladeira por R\$ 1 200,00. Deu R\$ 400,00 de entrada e o restante vai pagar depois de 4 meses com taxa de 2% ao mês a juro simples. Quanto vai custar a geladeira para Luíza?

**2.** Sérgio aplicou R\$ 5 000,00 a juro composto a uma taxa de 1,8% ao mês por um período de 1,5 ano. O rendimento de Sérgio ao final do período de aplicação é um valor entre:

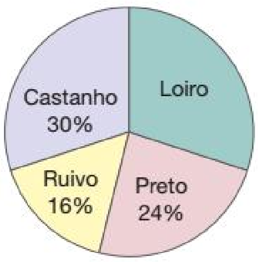
**a)** R\$ 3 130,00 e R\$ 4 250,00.

**b)** R\$ 1 110,00 e R\$ 1 650,00 .

**c)** R\$ 1 650,00 e R\$ 2 250,00.

**d)** R\$ 6 650,00 e R\$ 7 250,00.

**3.** (OBM) Os resultados de uma pesquisa das cores de cabelo de 1 200 pessoas são mostrados no gráfico abaixo. Quantas dessas pessoas possuem o cabelo loiro?




EDITORIA DE ARTE

**a)** 60

**b)** 320

**c)** 360

**d)** 400

**e)** 840

**4.** Considerando o gráfico da questão anterior, determine a probabilidade de uma pessoa sorteada dentre as 1 200 ter cabelo loiro.

**5.** (Vunesp-SP – Santa Casa) Em uma urna há 15 bolas, diferenciáveis apenas por suas cores, sendo 6 pretas, 5 brancas e 4 vermelhas, de modo que todas têm igual probabilidade de serem sorteadas. Uma pessoa vai até a urna, sorteia uma bola, não a mostra a ninguém e a mantém consigo. Em seguida, uma segunda pessoa vai até a urna e retira uma nova bola. A probabilidade de as duas bolas sorteadas terem a mesma cor é um valor:

**a)** entre 15% e 25%.

**b)** entre 25% e 35%.

**c)** entre 35% e 45%.

**d)** inferior a 15%.

**e)** superior a 45%.

**6.** A tabela a seguir apresenta os dados coletados referentes à área de plantio das flores em um jardim.

**Flores do jardim**

| Tipo | cravo | lírio | rosa | tulipa |
|---|---|---|---|---|
| Área (em $m^2$) | 4 | 6 | 4 | 12 |

Fonte: Equipe de jardinagem.

BERILOVA IRIDA/SHUTTERSTOCK.COM

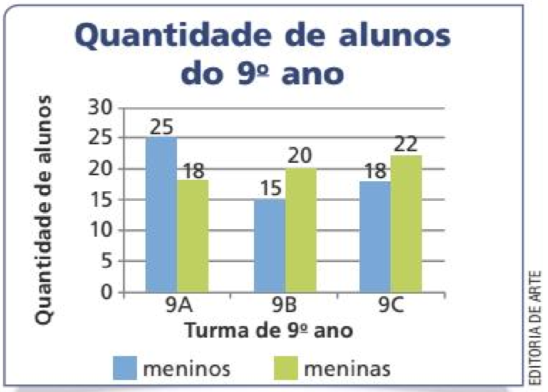
Lírio.

Lírio é uma flor muito antiga. Ela foi batizada de Amor Eterno pelos povos chineses.

**a)** Construa um gráfico que mostre a comparação dos dados dessa tabela.

**b)** Qual é a área média de plantio das flores?

**7.** A professora de Matemática do 9º ano de uma escola apresentou o gráfico a seguir para seus alunos analisarem.




Fonte: Salas da professora de Matemática do 9º ano da escola.

**a)** Qual é a quantidade média de meninas por turma?

**b)** Em qual turma há mais meninos? Quantos são?

**c)** Quantos alunos tem a turma com menor quantidade de alunos?

**d)** Em quais turmas há mais meninos do que meninas?

**8.** Um banco digital mostrou seu balanço entre 2009 e 2019 por meio do gráfico de linhas a seguir dizendo que foi a empresa dessa área que mais cresceu nos últimos anos.


Fonte: Banco digital.

Analise o gráfico e responda.

**a)** O que a empresa apresentou nesse gráfico?

**b)** O tipo de gráfico escolhido foi adequado para o que se queria apresentar?

**c)** Há alguma distorção nesse gráfico?

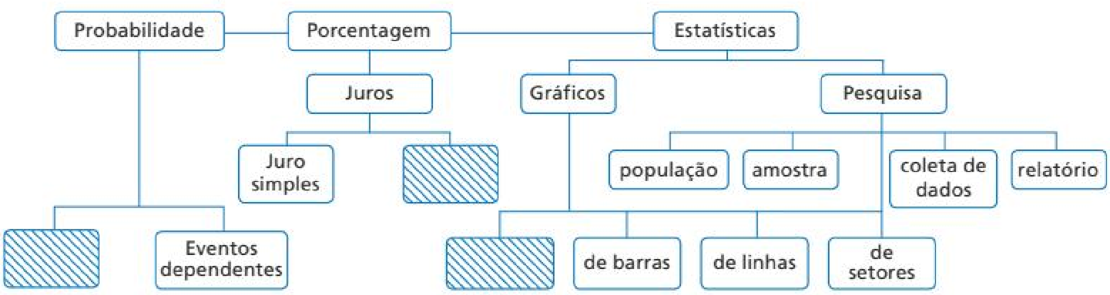
**9.** Junto com um colega, escolham um tema de interesse de vocês para fazer uma pesquisa. Elaborem um pequeno texto explicando as estratégias que vocês utilizariam para realizar a pesquisa.

## UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos cálculos com porcentagem em variadas situações, destacando a aplicação de taxas de juro nos regimes de juro simples e juro composto para cálculos de montantes e rendimentos; desenvolvemos o cálculo de probabilidade de eventos independentes e de eventos dependentes; aprofundamos o estudo de Estatística envolvendo análise de gráficos e cálculo de medidas estatísticas, observando o uso de gráficos adequados, gráficos que apresentam distorções, passos de uma pesquisa estatística simples e o uso de *software* na construção de gráficos estatísticos.

Vamos retomar as aprendizagens desta Unidade e refletir sobre elas:

- O que você entende por porcentagem?
- Explique a diferença entre o uso de juro simples e de juro composto.
- Como você definiria eventos independentes e eventos dependentes?
- Como você faria as relações indicadas no diagrama abaixo? Copie o diagrama no caderno e complete-o.



# ATUALIDADES EM FOCO

## Educação, envelhecimento e cidadania

Estima-se que no Brasil, até 2020, haja uma população de idosos de aproximadamente 40 milhões de pessoas. Leia o texto a seguir.

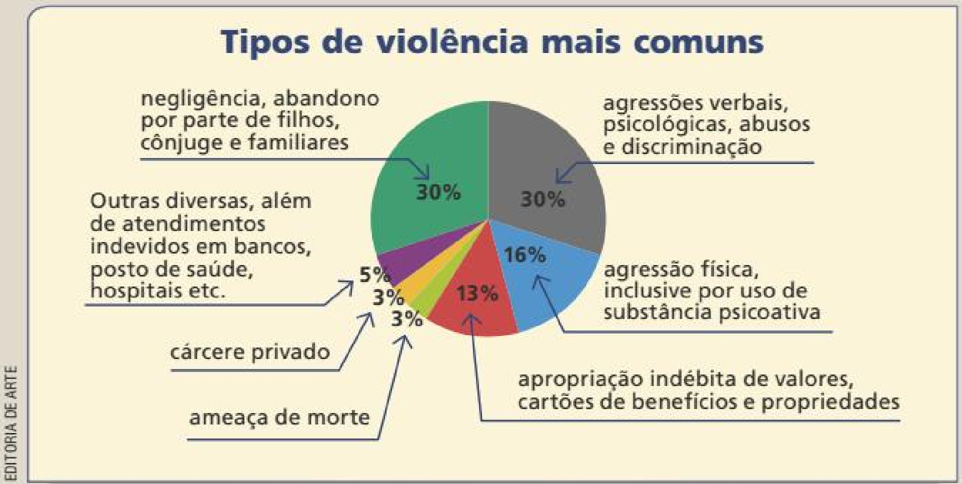
> "Abandonar as pessoas idosas à própria sorte, negligenciar nos cuidados com elas, agredi-las, mantê-las em cárcere privado para não ter que se preocupar com elas, se apropriar de cartões de benefícios e outros bens, entre outros tipos de violências são considerados crimes e os responsáveis pelo idoso vítima podem pegar de dois meses até 12 anos de cadeia, conforme o caso, além do pagamento de multa. O Estatuto do Idoso – que considera idosas as pessoas a partir dos 60 anos – obriga as famílias que possuem um mínimo de condições a cuidar dos seus velhos e lhes proporcionar qualidade de vida".
>
> ULBRICH, G.; MONTEIRO, J. Abandonar uma pessoa da terceira idade à própria sorte dá cadeia. **Tribuna do Paraná.** Disponível em: <https://www.tribunapr.com.br/painel-do-crime/abandonar-uma-pessoa-da-terceira-idade-a-propria-sorte-da-cadeia/>. Acesso em: 2 nov. 2018.

Em sua opinião, que ações podem ser desenvolvidas para modificar esses dados, ou seja, evitar que os idosos de nosso país sejam maltratados e desrespeitados? Converse com três colegas e, juntos, troquem ideias acerca do assunto e elaborem um plano de ações que possa modificar esse quadro.

Responda às questões no caderno.

**1.** Você conhece o estatuto do Idoso?

**2.** Veja abaixo os tipos de violência mais comuns e, juntamente com seus colegas e professor, conversem acerca destes dados e pesquisem informações sobre os Órgãos de Proteção ao Idoso existentes no estado onde moram.

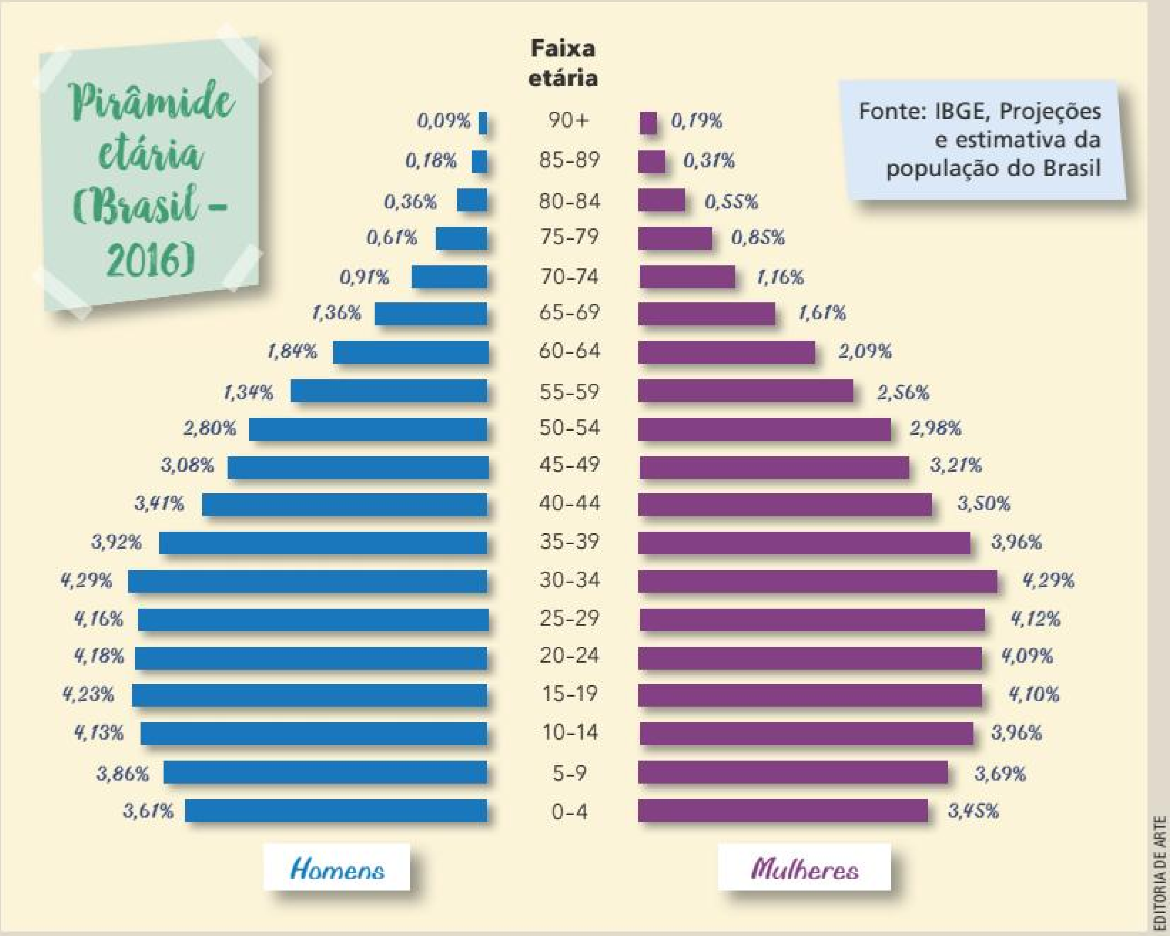



ULBRICH, G.; MONTEIRO J. Abandonar uma pessoa na terceira idade à própria sorte dá cadeia. **Tribuna do Paraná**. Disponível em: <https://www.tribunapr.com.br/painel-do-crime/abandonar-uma-pessoa-da-terceira-idade-a-propria-sorte-da-cadeia/>. Acesso em: 2 nov. 2018.

**3.** Você acha que a educação pode mudar essa realidade? Por quê?

**4.** O Brasil é considerado um país jovem. Mais da metade da população do nosso país tem entre 0 e 34 anos. Mas essa realidade está mudando. É possível verificar uma queda da taxa de natalidade e que a população brasileira está vivendo mais tempo (aumento da expectativa de vida); com isso, o Brasil em algumas décadas será um país com um maior número de idosos.

Observe a pirâmide etária a seguir. Esse gráfico permite observar a distribuição da população de acordo com as faixas de idade.




IBGE. **Pirâmide etária (Brasil).** Disponível em: <https://cnae.ibge.gov.br/en/component/content/article/95-7a12/7a12-vamos-conhecer-o-brasil/nosso-povo/16064-idade-da-populacao.html>. Acesso em: 2 nov. 2018.

Utilizando o *link* <http://livro.pro/emxav9>, você pode observar em tempo real a projeção da população brasileira. Acesse esse *link*, analise o gráfico acima e, utilizando cálculos de porcentagem, calcule o que se pede.

**a)** Pesquise o número de pessoas (homens e mulheres) com mais de 90 anos no Brasil.

**b)** Analisando o gráfico de barras e comparando o percentual de homens e de mulheres, o que se pode observar:

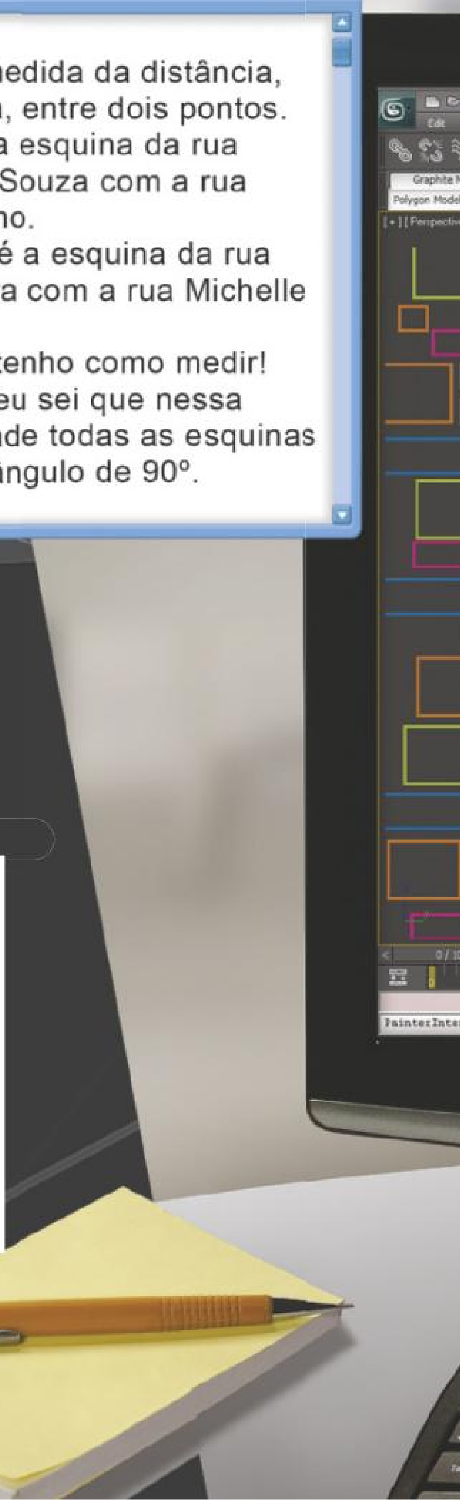
- na faixa etária entre 0 e 29 anos?
- na faixa etária entre 35 e 39 anos?
- na faixa etária entre 40 a 90 anos?

# 7 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA

Em alguns casos práticos, não é possível fazer medições diretas de segmentos de reta.

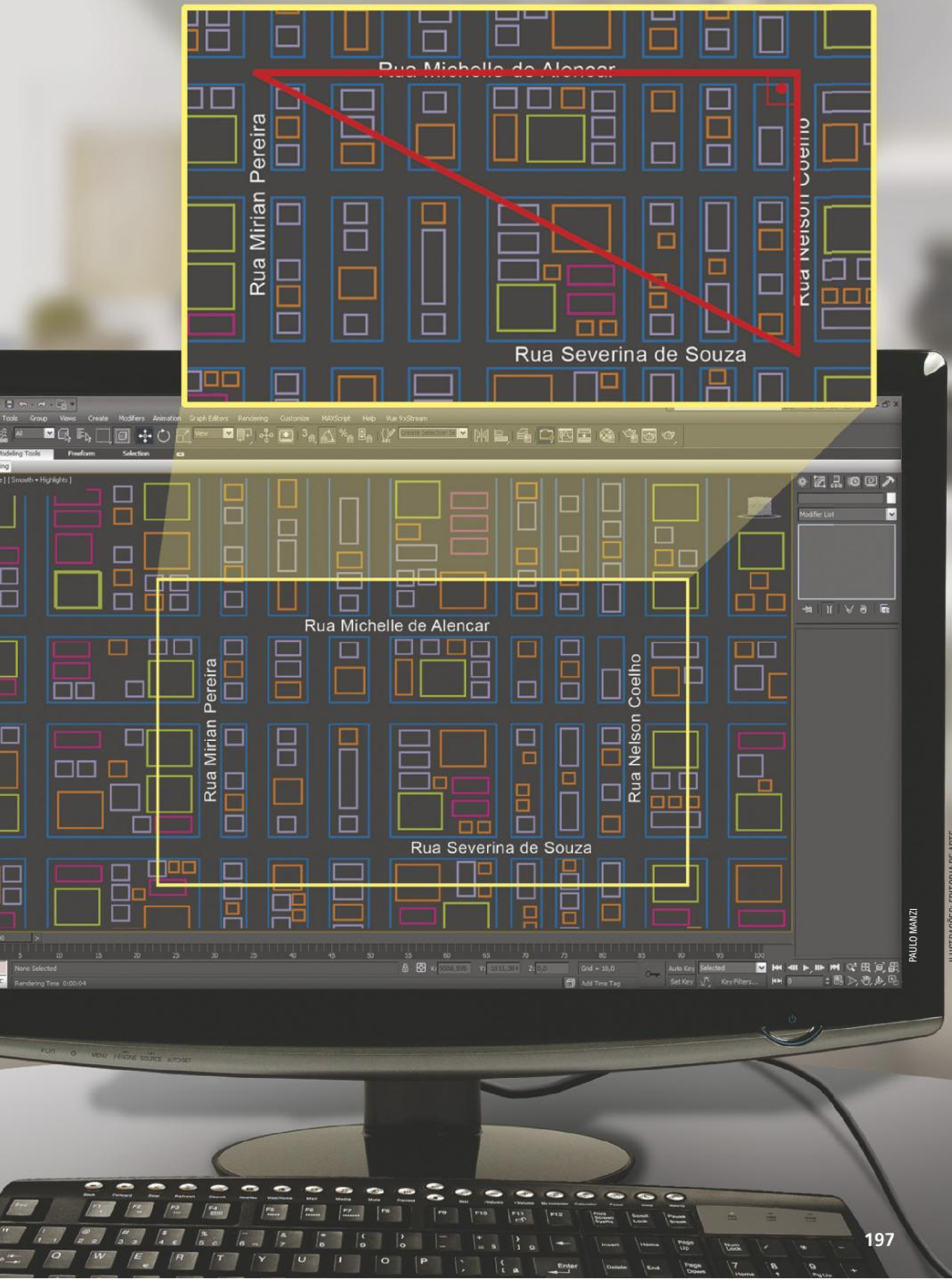
Veja, na imagem ao lado, a representação de um problema que um engenheiro tem de resolver: determinar a medida de um segmento de reta. Essa medida vai auxiliá-lo em um futuro projeto urbanístico de uma cidade. Esse segmento passa pelas construções, por isso é impossível fazer uma medição em linha reta.

Preciso da medida da distância, em linha reta, entre dois pontos.
Um ponto é a esquina da rua Severina de Souza com a rua Nelson Coelho.
Outro ponto é a esquina da rua Mirian Pereira com a rua Michelle de Alencar.
Mas eu não tenho como medir!
Além disso, eu sei que nessa parte da cidade todas as esquinas formam um ângulo de 90º.



Responda às questões no caderno.

- De quais informações o engenheiro dispõe para solucionar esse problema?
- Indique o nome da figura formada pelos segmentos de reta vermelhos e classifique-a quanto ao ângulo.
- Como o engenheiro conseguirá resolver esse problema?




PAULO MANZI

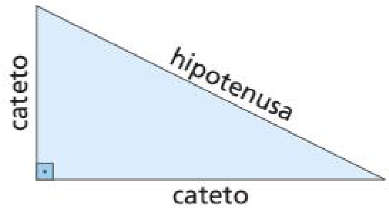
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

CAPÍTULO 1

# O TEOREMA DE PITÁGORAS

Vamos recordar algumas características do **triângulo retângulo**:

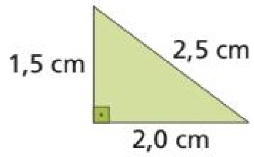
- É aquele que tem um ângulo reto.
- O lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa**.
- Os lados que formam o ângulo reto chamam-se **catetos**.




## PENSE E RESPONDA

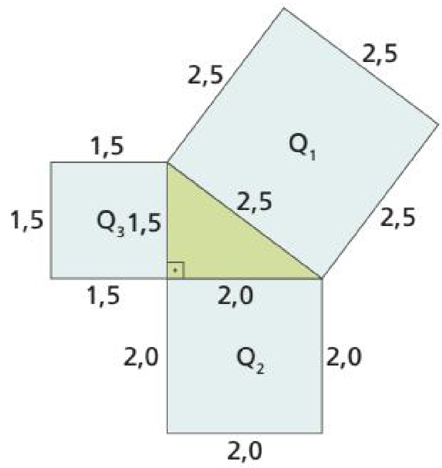
Resolva a questão no caderno.

**1.** Vamos considerar o triângulo retângulo da figura abaixo, em que a hipotenusa mede 2,5 cm, e os catetos medem 2,0 cm e 1,5 cm.




Construindo quadrados sobre os lados do triângulo retângulo dado, obtemos a figura ao lado.

Observe a figura e faça no caderno o que se pede.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** Seja $Q_1$ o quadrado construído sobre a hipotenusa e $A_1$ a sua área; determine o valor de $A_1$.

**b)** Seja $Q_2$ o quadrado construído sobre o cateto que mede 2,0 cm e $A_2$ a sua área; determine o valor de $A_2$.

**c)** Seja $Q_3$ o quadrado construído sobre o cateto que mede 1,5 cm e $A_3$ a sua área; determine o valor de $A_3$.

**d)** Escreva uma igualdade usando os valores encontrados para $A_1$, $A_2$ e $A_3$.

**e)** De acordo com a resposta dada no item anterior, você poderia dizer que, nesse triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos?

# O triângulo retângulo dos egípcios

A construção de pirâmides de base quadrada é uma das muitas aplicações do conhecimento geométrico dos antigos egípcios, que usavam um processo prático para obter "cantos" retos (ângulos retos).

Com o auxílio de uma corda com 12 nós, os egípcios parecem ter construído um triângulo retângulo particular para obter "cantos" em ângulos retos. Nesse triângulo, cujos lados medem 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades de comprimento, o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo reto.

# O triângulo retângulo e um grego famoso

Gravura de Pitágoras.

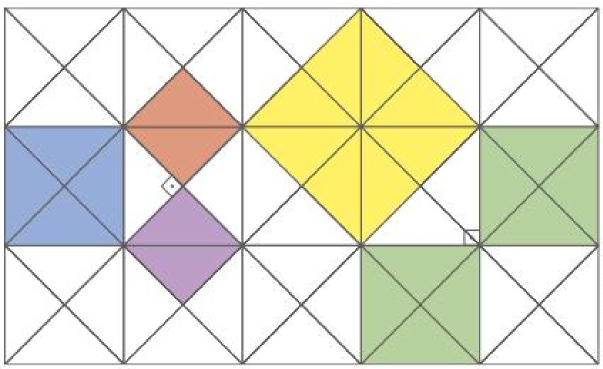
O filósofo e matemático grego Pitágoras nasceu, ao que parece, por volta de 572 a.C., na ilha egeia de Samos. A ele é atribuída a descoberta do teorema que leva seu nome, embora esse teorema tenha sido conhecido pelos babilônios, mais de um milênio antes. Acredita-se, porém, que a primeira demonstração geral desse teorema possa ter sido feita por Pitágoras.

Pitágoras foi o fundador da famosa Escola Pitagórica, que, além de ser um centro de estudo de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais, era uma irmandade unida por ritos e cerimônias secretas.

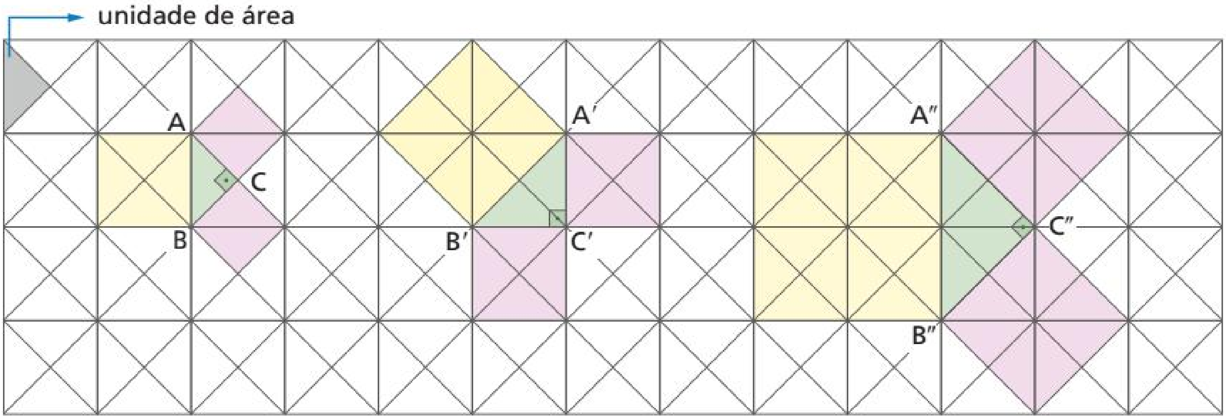
Como os fundamentos dessa escola eram estritamente orais, e todos os conhecimentos construídos eram atribuídos ao fundador, é difícil saber ao certo quais descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da confraria.

Para a demonstração do famoso teorema, é possível que Pitágoras e seus discípulos tenham se baseado nos conhecimentos geométricos dos egípcios e em mosaicos que eram vistos com frequência em paredes das construções do Egito antigo.

Mosaicos compostos de triângulos retângulos, parecidos com este abaixo, presentes em culturas mais antigas, levaram o ser humano a perceber importantes relações na Geometria.



A figura abaixo reproduz um mosaico com triângulos retângulos coloridos de verde, quadrados amarelos construídos sobre a hipotenusa desses triângulos e quadrados cor-de-rosa construídos sobre os catetos.




Considerando a unidade de área dada na ilustração, podemos construir o seguinte quadro:

| | Triângulo ABC | Triângulo A′B′C′ | Triângulo A″B″C″ |
|---|---|---|---|
| **Área do quadrado construído sobre a hipotenusa** | 4 | 8 | 16 |
| **Área do quadrado construído sobre um cateto** | 2 | 4 | 8 |
| **Área do quadrado construído sobre o outro cateto** | 2 | 4 | 8 |

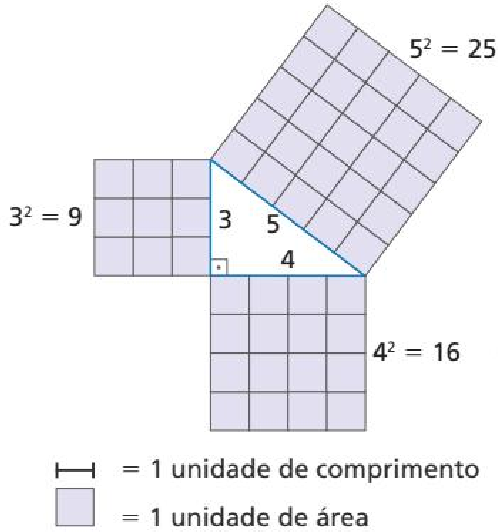
Observando que **4 = 2 + 2**; **8 = 4 + 4** e **16 = 8 + 8**, temos exemplos de uma relação válida para esses triângulos:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Essa descoberta estava inicialmente restrita a um triângulo retângulo particular: o triângulo retângulo isósceles.

Porém, estudos realizados posteriormente mostraram que a relação métrica descoberta era válida para todos os triângulos retângulos.

Tomando, por exemplo, o triângulo retângulo particular dos egípcios e construindo quadrados sobre os lados desse triângulo, podemos obter a figura ao lado, que nos permite estabelecer uma relação entre as medidas dos lados desse triângulo retângulo escaleno.



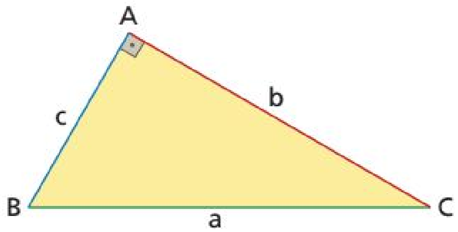

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$25 = 16 + 9 \quad \text{ou} \quad 5^2 = 4^2 + 3^2$$

Podemos, então, enunciar o **teorema de Pitágoras**:

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

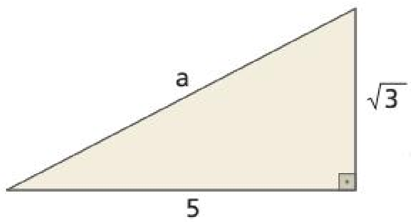
$$a^2 = b^2 + c^2$$




A recíproca desse teorema também é verdadeira, pois se em um triângulo o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos lados menores, então esse triângulo é retângulo.

Analise as situações a seguir que envolvem triângulos retângulos.

**1** Qual é o valor da medida a no triângulo retângulo da figura ao lado?




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como o triângulo é retângulo, vamos utilizar o teorema de Pitágoras para encontrar o valor da medida *a*.

$$a^2 = 5^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 3 \Rightarrow \underbrace{a = \sqrt{28}}_{a > 0} \Rightarrow a = 2\sqrt{7}$$

Logo, *a* mede $2\sqrt{7}$ m.

**2** Em um triângulo retângulo ABC, a hipotenusa mede a = 13 cm e um dos catetos mede b = 12 cm. Quanto mede o outro cateto?

De acordo com o teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

Como são dados a = 13 e b = 12, podemos escrever:

$$13^2 = 12^2 + c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 169 = 144 + c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2 = 169 - 144 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{25} \Rightarrow c = 5$$

Então, o outro cateto mede 5 cm.

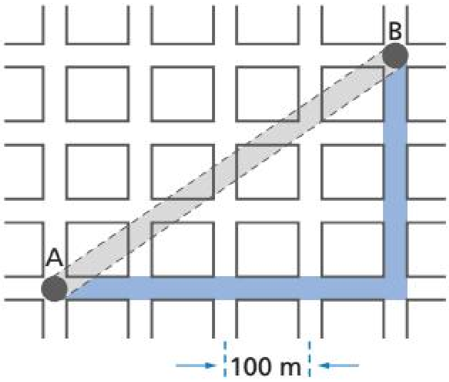
**3** Os lados de um triângulo medem 16 cm, 30 cm e 34 cm. Vamos verificar se esse triângulo é retângulo.

Para verificar se o triângulo é ou não retângulo, aplicamos a recíproca do teorema de Pitágoras, ou seja, sendo a = 34 cm, b = 30 cm e c = 16 cm, temos:

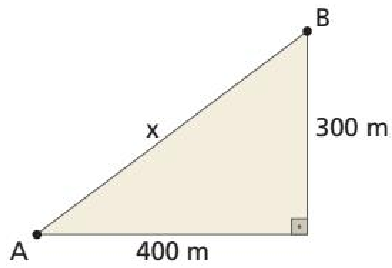
$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 34^2 = 1\,156 \\ b^2 = 30^2 = 900 \\ c^2 = 16^2 = 256 \end{array}\right] \text{Como } 1\,156 = 900 + 256 \text{, temos } a^2 = b^2 + c^2.$$

Como as medidas dos lados satisfazem o teorema de Pitágoras, então podemos dizer que o triângulo é retângulo.

**4** O esquema abaixo representa parte do bairro de uma cidade. Nele podemos ver a estação *A* e a estação *B* do metrô. O trecho azul indica um dos caminhos que um carro pode percorrer, na superfície, para ir de *A* a *B*, e o traçado cinza indica a linha subterrânea do metrô ligando, em linha reta, as duas estações. De acordo com os dados, qual é a distância que o metrô percorre da estação *A* até a *B*?




Modelo matemático:



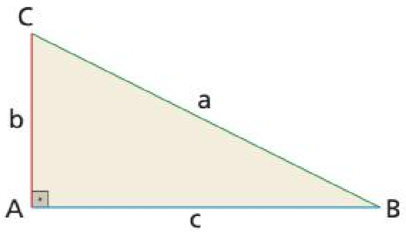

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo acima, temos:

$x^2 = 400^2 + 300^2 \Rightarrow x^2 = 160\,000 + 90\,000 \Rightarrow x^2 = 250\,000 \Rightarrow x = \sqrt{250\,000} \Rightarrow x = 500$

Portanto, da estação *A* até a estação *B*, o metrô percorre 500 m.

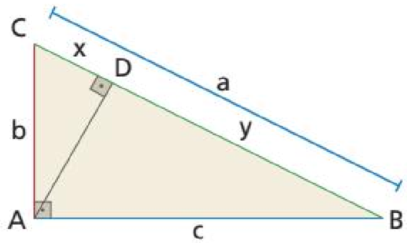
# Uma demonstração do teorema de Pitágoras

Existem inúmeras maneiras de demonstrar esse teorema. Vamos ver uma demonstração baseada na semelhança de triângulos. Consideremos o triângulo retângulo da figura a seguir.

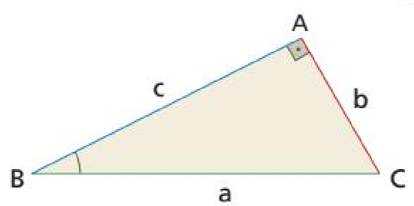


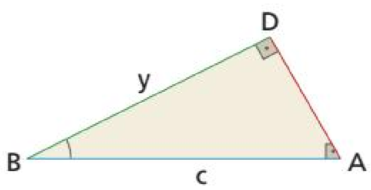

a: medida da hipotenusa.
b: medida de um cateto.
c: medida do outro cateto.

Nesse triângulo, vamos traçar a altura relativa ao lado BC. Essa altura divide a hipotenusa em dois segmentos, cujas medidas chamaremos de *x* e *y*.




Os triângulos ABC e ABD são semelhantes, pois possuem um ângulo reto e um ângulo comum *B*.



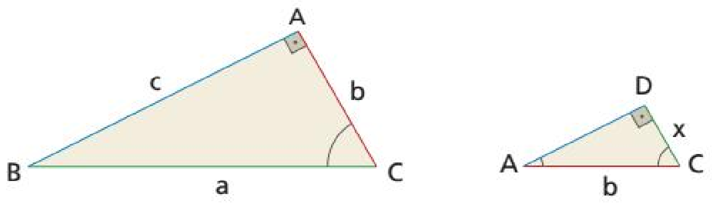




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{y} = \frac{a}{c} \Rightarrow ya = c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{a}$$

Analogamente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes, pois possuem um ângulo reto e um ângulo comum C.




EDITORIA DE ARTE

Assim, podemos escrever:

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow xa = b^2 \Rightarrow x = \frac{b^2}{a}$$

Como $a = x + y$, podemos escrever:

$$a = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Veja no material audiovisual o vídeo sobre o teorema de Pitágoras.

## PARA QUEM QUER MAIS

### A Matemática chinesa e Bhaskara

**Datar o começo da história documentada da Matemática chinesa não é fácil. Estimativas quanto à data de *Chou Pei Suan Ching*, considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos, diferem por quase mil anos. Alguns consideram esse registro como uma boa exposição da Matemática chinesa de cerca de 1200 a.C., mas outros colocam a obra no primeiro século de nossa era.**

**Quase tão antigo quanto essa obra, e talvez o mais influente livro chinês de Matemática, foi o *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática*. Esse livro contém 246 problemas, e a maior parte deles envolve situações práticas.**

**O famoso problema do "bambu quebrado" apresenta o seguinte texto:**

> "Um bambu com 1 *zhang* de altura partiu-se, e a parte de cima tocou o chão a 3 *chih* da base do bambu. Qual é a altura da quebra? (Nota: 1 *zhang* = 10 *chih*)".

**No século XII, o matemático hindu Bhaskara publicou o mesmo problema assim:**

> "Se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado?".

- **Que tal você resolver esse problema no caderno?**

Informações obtidas em: BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1996. p. 143-144; 162.

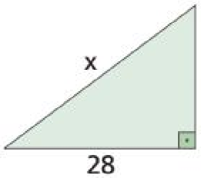
# ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

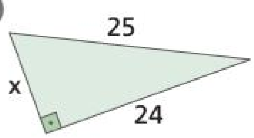
**1.** Os lados de um triângulo ABC medem 26 cm, 24 cm e 10 cm. Mostre que esse triângulo é retângulo.

**2.** Calcule a medida x em cada um dos triângulos retângulos a seguir.

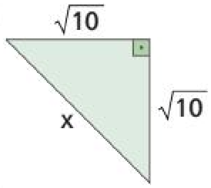
**a)**



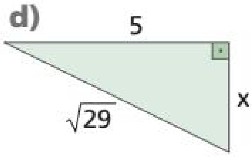

**b)**



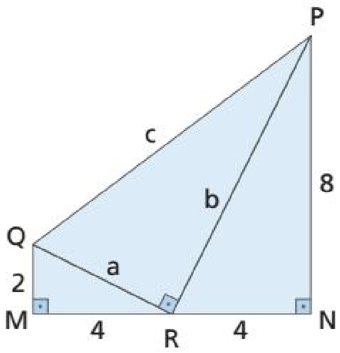

**c)**




**d)**




**3.** Considerando a figura a seguir, determine:



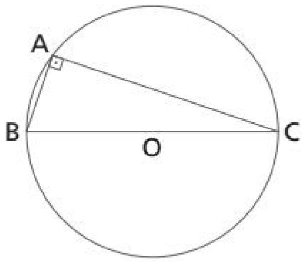

**a)** a medida *a*;

**b)** a medida *b*;

**c)** a medida *c*;

**d)** o perímetro do trapézio MNPQ.

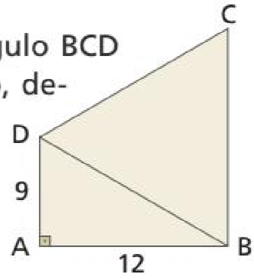
**4.** Na circunferência da figura a seguir, o comprimento do diâmetro $\overline{BC}$ é 5 cm. Sendo *A* um ponto da circunferência e sabendo que o comprimento de $\overline{AB}$ é 1 cm, calcule a medida do segmento $\overline{AC}$. (Use $\sqrt{6} = 2,45$.)



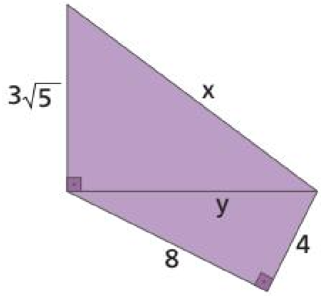

**5.** Sabendo que o triângulo BCD na figura é equilátero, determine o perímetro:

**a)** do triângulo BCD;

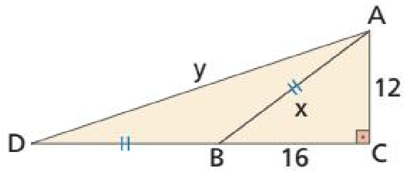
**b)** do quadrilátero ABCD.




**6.** Considerando a figura abaixo, calcule o valor da expressão x + y.




**7.** Na figura, os segmentos AB e BD têm o mesmo comprimento.

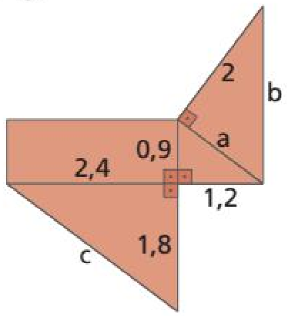



Nessas condições, determine a medida:

**a)** *x* do segmento AB;

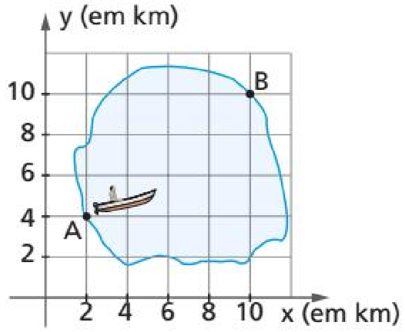
**b)** *y* do segmento AD.

**8.** Na figura, as medidas são dadas em centímetros. Calcule o valor da expressão a + b + c.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**9.** João, um navegante solitário, deseja ir da cidade *A* à cidade *B*, ambas às margens de um lago e representadas na figura a seguir. Ele não considera a correnteza da água e pretende navegar o menor tempo possível.




**a)** Qual é a distância, em quilômetro, entre a cidade *A* e a cidade *B*?

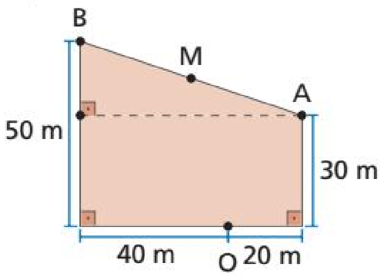
**b)** Considerando que João navega a uma velocidade média de 2 km/h, quanto tempo ele levará para ir da cidade *A* até a cidade *B*?

**10.** O monitor de um *notebook* tem formato retangular, com a diagonal medindo 30 cm e um lado medindo $\frac{3}{4}$ do outro lado. Quais são as medidas dos lados desse monitor?

**11.** Conta a lenda que um pirata deixou um mapa com a localização exata de um valioso tesouro em uma ilha. Esse mapa continha dicas de como encontrar o tesouro, a partir de certo ponto *O* de origem. O tesouro localizava-se no ponto médio *M*, entre os pontos *A* e *B*, definidos no mapa de acordo com as dicas descritas a seguir.

- Ponto *A*: a partir do ponto *O* de origem, seguir 20 m na direção leste e, em seguida, mais 30 m na direção norte.
- Ponto *B*: a partir do ponto *O* de origem, seguir 40 m na direção oeste e, em seguida, 50 m na direção norte.

Veja o esquema:

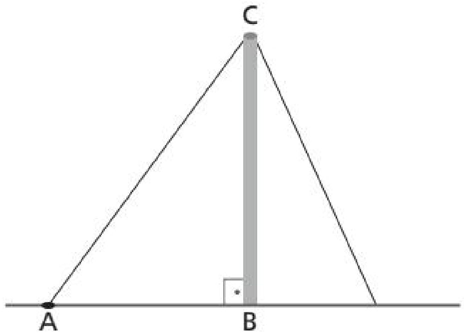



Considerando $\sqrt{10} = 3{,}16$, responda em seu caderno:

**a)** Qual é a distância do ponto *A* ao ponto *B*?

**b)** Qual é a distância do ponto *A* ao ponto *M*?

**12.** Uma torre vertical é presa por cabos de aço fixos no chão, em um terreno plano horizontal, conforme mostra o esquema abaixo. Se o ponto *A* está a 15 m da base *B* da torre e o ponto *C* está a 20 m de altura, qual é o comprimento do cabo $\overline{AC}$?




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**13.** Uma árvore foi quebrada pelo vento, e a parte do tronco que restou em pé forma um ângulo reto com o solo. Se a altura da árvore antes de quebrar era 9 m e a ponta da parte quebrada está a 3 m da base da árvore, qual é a altura do tronco da árvore que restou em pé?

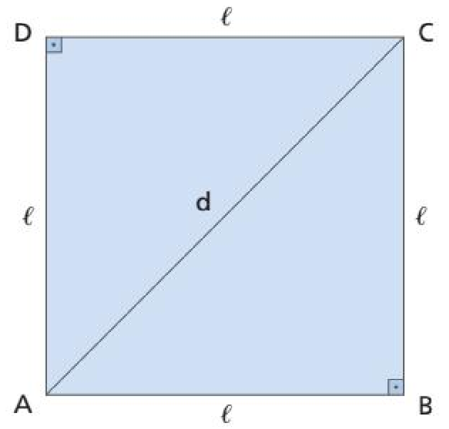
**14.** Durante um incêndio em um edifício residencial, os bombeiros utilizaram uma escada Magirus de 10 m para atingir a janela de um dos apartamentos incendiados. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 6 m do edifício. Qual é a altura desse apartamento em relação ao chão?

ILUSTRA CARTOON

# Aplicando o teorema de Pitágoras no quadrado

Aplicando o teorema de Pitágoras no quadrado, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida da diagonal e a medida do lado do quadrado. No quadrado ABCD, $\ell$ é a medida do lado, e *d*, a medida da diagonal. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, podemos escrever:

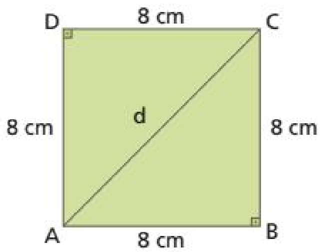
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2 \ (\ell > 0)$$
$$d = \sqrt{2\ell^2}$$
$$d = \ell\sqrt{2}$$






Acompanhe as situações a seguir.

**1** Quanto mede a diagonal do quadrado abaixo?




Pela expressão vista anteriormente, temos $d = \ell\sqrt{2}$. Substituindo $\ell$ por 8, temos $d = 8\sqrt{2}$. Logo, a medida da diagonal desse quadrado é $8\sqrt{2}$ cm.

**2** A diagonal de um quadrado mede 10 cm. Quanto mede o lado $\ell$ desse quadrado?
Pela situação, temos d = 10 cm.
Substituindo na expressão $d = \ell\sqrt{2}$, temos:

$$10 = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell\sqrt{2} = 10 \Rightarrow \ell = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = \frac{10\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ell = 5\sqrt{2}$$

Logo, o lado desse quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm.

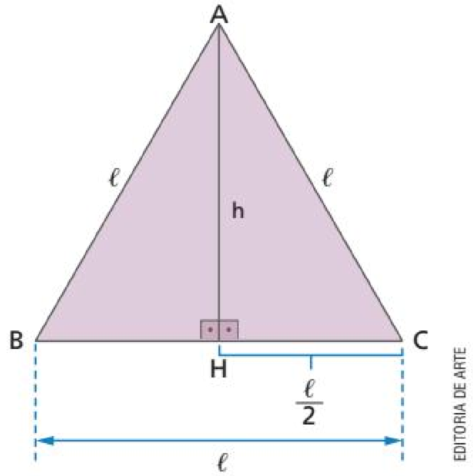
**DESCUBRA MAIS**

**Os peregrinos** (coleção O contador de histórias e outras histórias da Matemática), de Egídio Trambaiolli Neto. Editora FTD, 1998. Um grupo de adolescentes precisa resolver um grande desafio: evitar um cataclisma, que ameaça extinguir toda a vida terrestre.

# Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo equilátero

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo equilátero, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida *h* da altura e a medida $\ell$ do lado do triângulo.

A figura abaixo é um triângulo equilátero, em que $\ell$ é a medida do lado, e *h* é a medida da altura.




No triângulo equilátero, a altura e a mediana coincidem; logo, o ponto *H* é ponto médio do lado $\overline{BC}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHC ($\hat{H}$ é reto), temos:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} (\ell > 0) \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Acompanhe, então, as situações a seguir.

**1** Vamos determinar a medida *h* da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

Substituindo $\ell$ por 20 na expressão $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, podemos escrever:

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

Logo, a altura desse triângulo equilátero mede $10\sqrt{3}$ cm.

**2** A altura de um triângulo equilátero mede 9 cm. Qual é a medida $\ell$ do lado desse triângulo?

Substituindo h por 9 em $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$9 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell\sqrt{3} = 18 \Rightarrow \ell = \frac{18}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = 6\sqrt{3}$$

Logo, a medida do lado desse triângulo é $6\sqrt{3}$ cm.

# ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Sabe-se que a medida do lado de um quadrado é 12 cm. Calcule a medida *d* da diagonal desse quadrado:

**a)** sem usar a fórmula;

**b)** usando a fórmula.

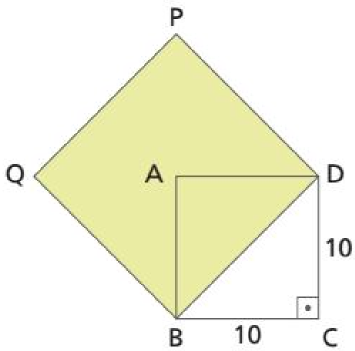
**2.** Quando o perímetro de um quadrado é 80 cm, qual é a medida *d* da diagonal?

**3.** A diagonal de um quadrado mede $15\sqrt{2}$ cm. Qual é a medida $\ell$ do lado e a medida do perímetro desse quadrado?

**4.** Um quadrado tem 576 $cm^2$ de área. Calcule o comprimento, expresso na forma decimal, da diagonal desse quadrado. (Use $\sqrt{2} = 1{,}41$.)

**5.** Qual é a área de um quadrado cuja diagonal mede 40 cm?

**6.** Sabendo que na figura as medidas estão expressas em centímetros, calcule:




**a)** a medida do lado do quadrado BDPQ;

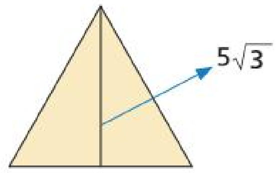
**b)** o perímetro desse quadrado;

**c)** a área desse quadrado.

**7.** Se o lado de um triângulo equilátero mede 24 cm, qual será a medida *h* da altura desse triângulo?

**8.** O perímetro de um triângulo equilátero é 36 cm. Escreva, na forma de número decimal, a medida *h* da altura do triângulo, considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$.

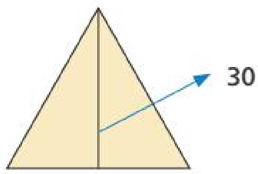
**9.** Em um triângulo equilátero, a altura mede $5\sqrt{3}$ cm. Qual é o perímetro desse triângulo?




**10.** A área de um triângulo pode ser calculada multiplicando a medida de um lado pela medida da altura relativa a esse lado e dividindo o resultado por 2. Considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$, qual é a área de um triângulo equilátero cujo lado mede 6 cm?

**11.** A medida do lado de um triângulo equilátero é igual à medida da diagonal de um quadrado de 10 cm de lado. Quanto mede a altura desse triângulo?

**12.** Considerando que a altura de um triângulo equilátero mede 30 cm, qual é o perímetro desse triângulo? (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$.)




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**DESAFIO**

Junte-se a um colega e respondam o desafio a seguir.

**13.** Sabendo que $\ell$ expressa a medida do lado de um triângulo equilátero e $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ expressa a medida da altura, calcule o valor da área *A* em função de $\ell$, dado que $A = \frac{\ell \cdot h}{2}$.

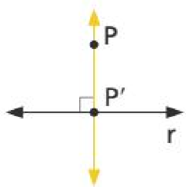
CAPÍTULO 2

# AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

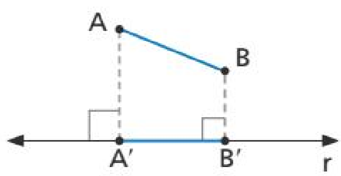
Além do teorema de Pitágoras, existem outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo.

Para estudar essas outras relações métricas, vamos entender o conceito de **projeção ortogonal**.

Considere uma reta *r* e um ponto *P* externo a ela. Ao traçarmos uma reta perpendicular à *r* passando por *P*, obtemos o ponto *P′* na intersecção das retas. O ponto *P′* é chamado de **projeção ortogonal de *P* sobre a reta *r*.**

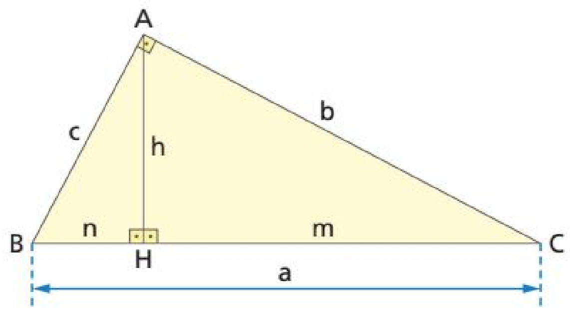



Considere a reta *r* e o segmento AB. Projetando as extremidades de $\overline{AB}$ sobre *r*, obtemos os pontos A′ e B′. O segmento A′B′ é chamado de **projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre *r*.**




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Vamos, inicialmente, identificar esses elementos considerando o seguinte triângulo retângulo:




- $\overline{BC}$ é a hipotenusa; sua medida é indicada por *a*.
- $\overline{AC}$ é um cateto; sua medida é indicada por *b*.
- $\overline{AB}$ é outro cateto; sua medida é indicada por *c*.
- $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa; sua medida é indicada por *h*.
- $\overline{BH}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa; sua medida é indicada por *n*.
- $\overline{CH}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa; sua medida é indicada por *m*.

Agora, podemos estabelecer relações entre essas medidas, demonstradas a partir da semelhança de triângulos e baseadas na seguinte propriedade:

Em qualquer triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide o triângulo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes ao triângulo dado e semelhantes entre si.

Assim, no triângulo ABC acima, temos que: $\begin{cases} \triangle HBA \sim \triangle ABC \\ \triangle HAC \sim \triangle ABC \\ \triangle HBA \sim \triangle HAC \end{cases}$

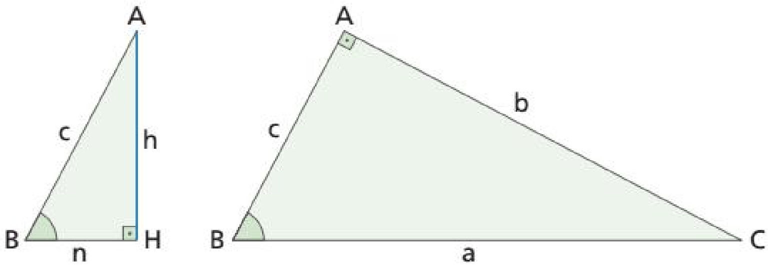
Vamos estudar essas relações.

**1ª relação:** Considerando os triângulos HBA e ABC, temos:

$\hat{H} \cong \hat{A}$ (ângulos retos)
$\hat{B} \cong \hat{B}$ (ângulo comum)

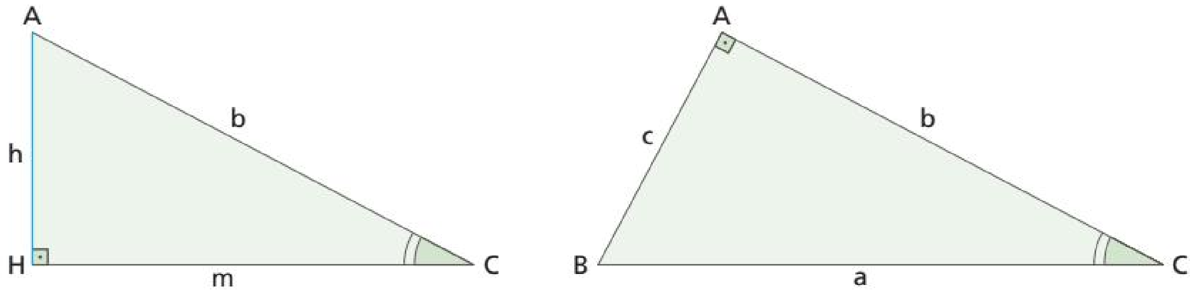
Portanto, $\triangle HBA \sim \triangle ABC$.
Daí, temos a proporção:

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = an$$




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considerando agora os triângulos HAC e ABC, temos:



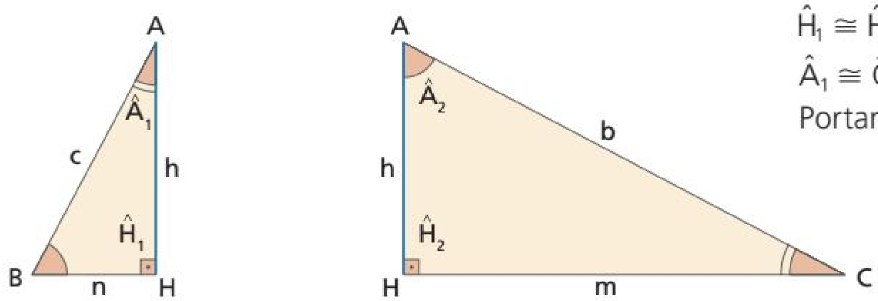

$\hat{H} \cong \hat{A}$ (ângulos retos)
$\hat{C} \cong \hat{C}$ (ângulo comum)
Portanto, $\triangle HAC \sim \triangle ABC$.

Daí, temos a proporção:

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = am$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

**2ª relação:** Considerando os triângulos HBA e HAC, temos:




$\hat{H}_1 \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
$\hat{A}_1 \cong \hat{C}$ (complementos do ângulo B)
Portanto, $\triangle HBA \sim \triangle HAC$.

Daí, temos a proporção:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h \cdot h = m \cdot n \Rightarrow h^2 = mn$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que essa altura determina sobre a hipotenusa (que são as projeções dos dois catetos sobre a hipotenusa).

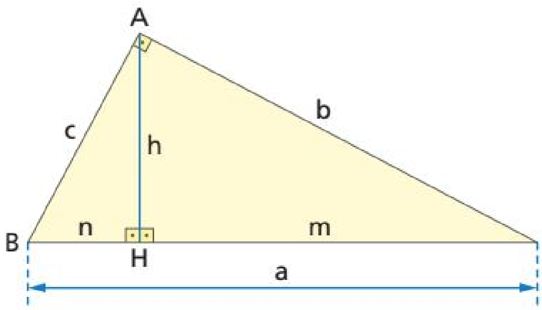
**3ª relação:** Da 1ª relação métrica, temos que $b^2 = am$ e $c^2 = an$. Multiplicando membro a membro essas duas igualdades, temos:

$$b^2 \cdot c^2 = am \cdot an \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{m \cdot n}_{h^2} \Rightarrow b^2c^2 = a^2h^2 \Rightarrow bc = ah$$

Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

**4ª relação:** Vamos verificar, agora, uma demonstração algébrica do teorema de Pitágoras.

Como já vimos, da 1ª relação, temos que $b^2 = am$ e $c^2 = an$. Adicionando membro a membro essas duas igualdades, obtemos:



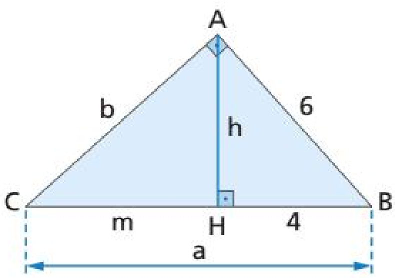

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a\underbrace{(m + n)}_{a} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Observe, agora, um exemplo de aplicação dessas relações.

No triângulo retângulo a seguir, vamos determinar as medidas *a*, *b*, *h* e *m* indicadas.




Da 1ª relação:

$6^2 = 4a$

$4a = 36$

$a = 9$

Mas:

$m + 4 = a$

$m + 4 = 9$

$m = 5$

Da 2ª relação:

$h^2 = 5 \cdot 4$

$h^2 = 20$ $(h > 0)$

$h = \sqrt{20}$

$h = 2\sqrt{5}$

Da 3ª relação:

$b^2 = 9 \cdot 5$

$b^2 = 45$ $(b > 0)$

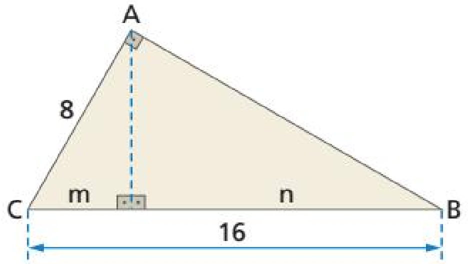
$b = \sqrt{45}$

$b = 3\sqrt{5}$

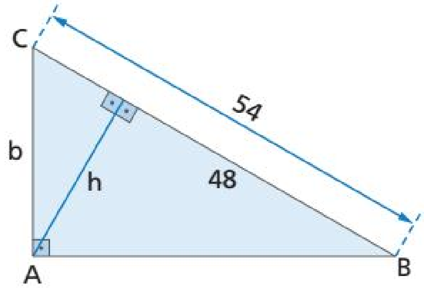
## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

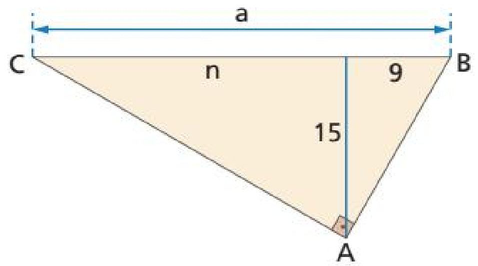
**1.** Determine as medidas *m* e *n* indicadas no triângulo retângulo a seguir.



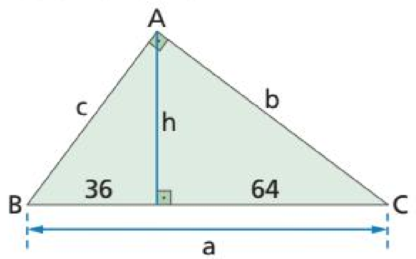

**2.** Determine as medidas *b* e *h* indicadas no triângulo retângulo abaixo.




**3.** Determine as medidas *a* e *n* indicadas no triângulo retângulo abaixo.




**4.** As medidas indicadas no triângulo retângulo ABC da figura são tomadas em milímetros. Determine as medidas *a*, *h*, *b* e *c* nele indicadas.




**5.** Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm, e a projeção desse cateto sobre a hipotenusa mede 5 cm. Nessas condições, determine a medida:

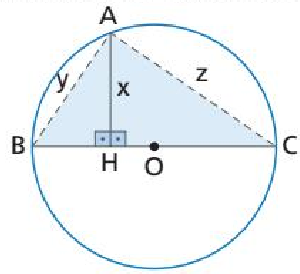
**a)** da hipotenusa;

**b)** do outro cateto;

**c)** da altura relativa à hipotenusa.

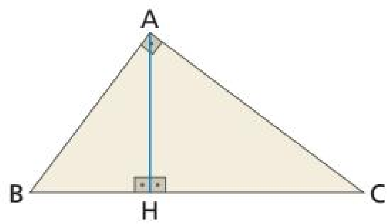
**6.** Em um retângulo, a perpendicular traçada de um vértice sobre uma diagonal determina sobre essa diagonal segmentos de 64 cm e 36 cm. Calcule o perímetro desse retângulo.

**7.** Por um ponto *A* de uma circunferência traça-se o segmento AH perpendicular a um diâmetro BC, conforme a figura abaixo. Se o ponto *H* determina no diâmetro segmentos de 4 cm e 9 cm, encontre a medida *x* de $\overline{AH}$, a medida y da corda $\overline{AB}$ e a medida z da corda $\overline{AC}$.




**8.** Em um mapa, as cidades *A*, *B* e *C* são os vértices de um triângulo retângulo, e o ângulo reto está em *A*. A estrada $\overline{AB}$ tem 80 km, e a estrada $\overline{BC}$ tem 100 km. Um rio impede a construção de uma estrada que liga diretamente a cidade *A* à cidade *C*. Por esse motivo, projetou-se uma estrada saindo da cidade *A* e perpendicular à estrada $\overline{BC}$, para que ela seja mais curta possível. Qual o comprimento da estrada que será construída?

**9.** Em um triângulo retângulo ABC, o cateto $\overline{AB}$ mede 15 cm e o $\overline{HC}$ mede 16 cm. Determine a medida *x* da hipotenusa desse triângulo ABC.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**POR TODA PARTE**

## Ivoti e as contruções enxaimel

Responda às questões no caderno.

No município de Canela (RS), há forte presença da cultura alemã. Os imigrantes alemães recriaram os ambientes de suas cidades natais e construíram casas com base na arquitetura europeia.

As construções enxaimel, representadas por edificação com estrutura aparente de madeira, fazem parte da arquitetura alemã e são muito comuns na região Sul do Brasil.

Informações obtidas em: <http://www.ivoti.rs.gov.br/turismo>. Acesso em: 6 nov. 2018.

ROGERIO REIS/TYBA

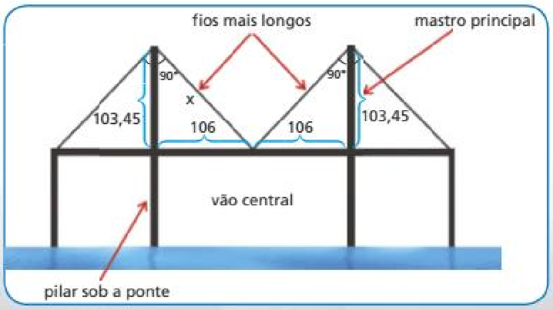
Castelinho Caracol, arquitetura de influência alemã, construída em 1913, em Canela, 2011

Observe ao lado a representação de uma construção característica do Rio Grande do Sul, em que a torre (sem o telhado) lembra a forma de um sólido – prisma hexagonal – cujas faces têm 2 m de largura. Os triângulos maiores de madeira incrustados nas paredes da torre têm 1 m de altura, 2 m de base e são isósceles.

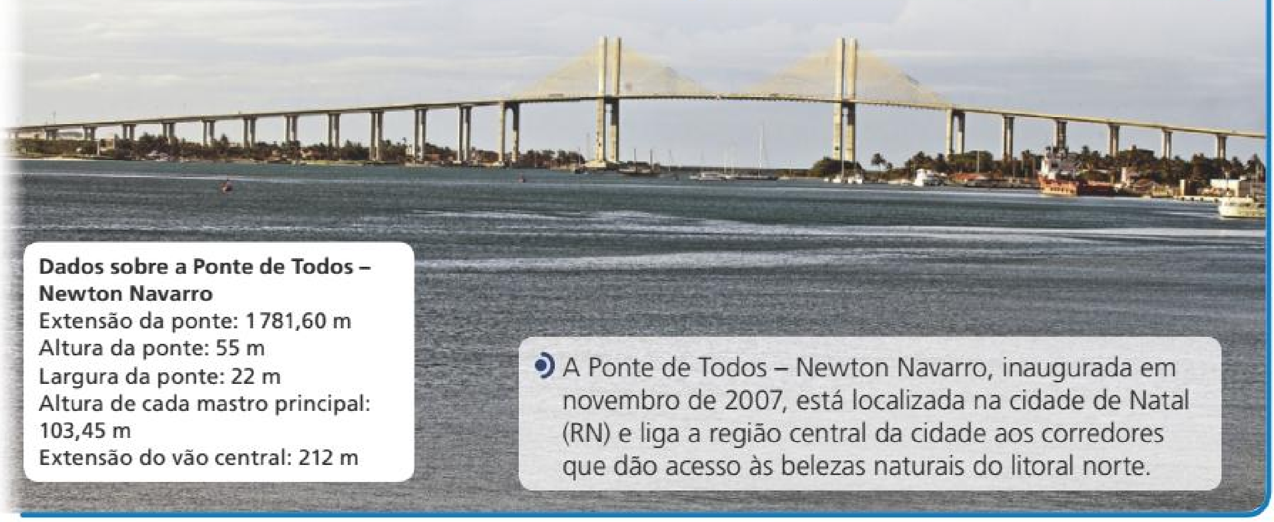

ILUSTRA CARTOON

**1.** Quantos metros de ripa de madeira foram utilizados em todos os triângulos maiores da torre? Utilize uma calculadora para obter o resultado aproximado até o centímetro.

**2.** A ponte estaiada é um tipo de ponte suspensa por cabos de sustentação, presos em um ou mais mastros e no chão (tabuleiro) da ponte. Em muitas cidades do Brasil podemos encontrar pontes estaiadas. Observe o esquema dessa ponte e, usando uma calculadora, descubra cerca de quantos metros de fio de sustentação foram gastos em cada um dos fios mais longos (indicados pelas setas), que têm suas extremidades presas no centro do vão central e no alto dos mastros.




EDITORIA DE ARTE



**Dados sobre a Ponte de Todos – Newton Navarro**
Extensão da ponte: 1781,60 m
Altura da ponte: 55 m
Largura da ponte: 22 m
Altura de cada mastro principal: 103,45 m
Extensão do vão central: 212 m

A Ponte de Todos – Newton Navarro, inaugurada em novembro de 2007, está localizada na cidade de Natal (RN) e liga a região central da cidade aos corredores que dão acesso às belezas naturais do litoral norte.

DU ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

CAPÍTULO 3

# COMPRIMENTO DE ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

## PENSE E RESPONDA

FOTOS: NEOIMAGEM

**Primeiro, pegue um objeto cilíndrico qualquer, como uma latinha de refrigerante. Depois, use um barbante para contorná-lo, como mostra a foto. Em seguida, marque a quantidade de barbante necessária para esse contorno.**

**Por último, pegue o barbante, estique-o e meça com uma régua o pedaço que você usou. Desse modo, obteremos a medida do comprimento da circunferência que corresponde ao contorno da latinha.**

**Responda às questões no caderno.**

**a)** Qual é o comprimento aproximado do barbante que você marcou? Dê a resposta em milímetro.

**b)** Use a régua para determinar a medida aproximada do diâmetro da latinha. Que medida, em milímetro, você encontrou?

**c)** Se você dividir o número que expressa o comprimento da circunferência que corresponde ao contorno da latinha pelo número que expressa a medida do diâmetro, qual número vai encontrar como resultado?

Aro da rodinha de bicicleta.

Comprimento C da circunferência do aro.

FOTOS: DOTTA2

Agora, suponha que um aro da rodinha de uma bicicleta possua o raio com comprimento igual a *r*.

Vamos considerar que seja possível adaptar, perfeitamente, sobre esse aro, um barbante qualquer.

Cortando esse barbante e esticando-o, obteremos o comprimento da circunferência desse aro.

Se dividirmos o comprimento *C* de uma circunferência pelo comprimento 2r do seu diâmetro, encontraremos uma aproximação do número irracional π (isso ocorre sempre, qualquer que seja a circunferência).

$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2r \cdot \pi \Rightarrow C = 2\pi r$$

Essa fórmula permite calcular o comprimento de qualquer circunferência, conhecida a medida *r* do seu raio.

Nos exemplos que vamos resolver a seguir, considere $\pi = 3{,}14$.

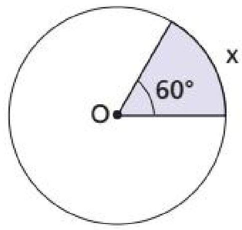
**1** Qual é a medida *r* do raio de uma circunferência que tem 18,84 cm de comprimento?

$$C = 2\pi r \Rightarrow 18{,}84 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow 6{,}28r = 18{,}84 \Rightarrow r = 3$$

Logo, o raio da circunferência mede 3 cm.

**2** Qual é o comprimento *x* de um arco de 60° em uma circunferência que tem 21 cm de raio?

Sabemos que a medida completa da circunferência, em graus, é 360. Portanto, para resolver esse problema, vamos usar uma regra de três simples e direta:



EDITORIA DE ARTE

360° ———— $2\pi r$

60° ———— x

Daí:

$$\frac{360°}{60°} = \frac{2\pi r}{x} \Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 21}{x} \Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{131{,}88}{x} \Rightarrow 6x = 131{,}88 \Rightarrow x = 21{,}98$$

Logo, o comprimento do arco pedido é 21,98 cm.

## PARA QUEM QUER MAIS

### O número pi na história da Matemática

A descoberta do número pi é uma das grandes páginas da história da Matemática. O número irracional $\pi$ (pi) pode ser expresso na forma decimal por 3,14159265...

A primeira tentativa científica de calcular $\pi$ parece ter sido de Arquimedes, que chegou à conclusão, cerca de 240 a.C., de que esse valor estava entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$ ou que, até a segunda casa decimal, $\pi$ era dado por 3,14.

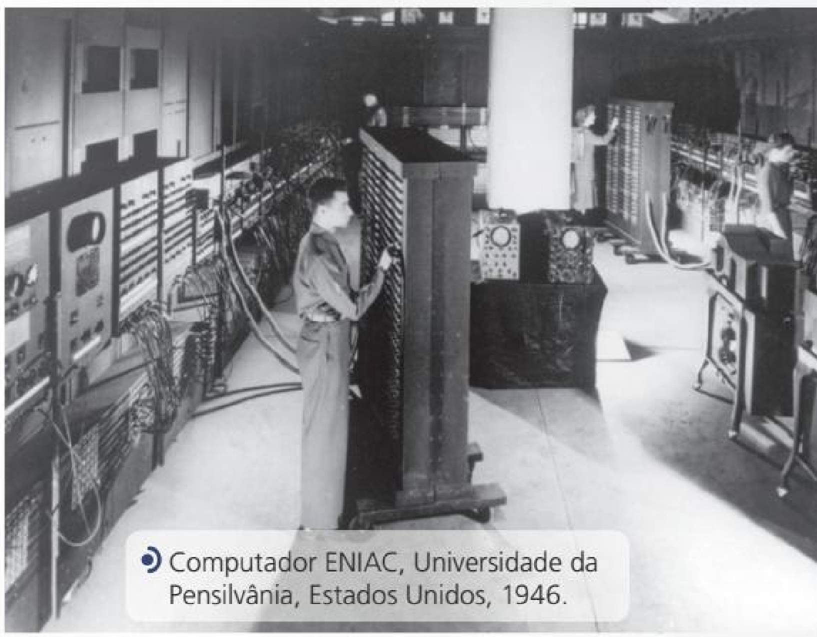
Depois de Arquimedes, a primeira aproximação notável de $\pi$ foi dada por Cláudio Ptolomeu, que, por volta do ano 150, chegou a 3,1416.

O mecânico chinês Tsu Ch'ung-chih, cerca do ano 480, deu a interessante aproximação racional para $\pi$, $\frac{355}{113} = 3{,}14159292...$, que é correta até a sexta casa decimal.

O matemático árabe Al-Kashi, por volta de 1429, calculou $\pi$ até a décima sexta casa decimal; e o holandês Ludolph van Ceulen calculou $\pi$ até a trigésima quinta casa decimal, em 1610.

Em 1949, com o ENIAC, um computador eletrônico, chegou-se ao valor de $\pi$ com 2 037 casas decimais, e, a partir de então, com o desenvolvimento da ciência da computação, começou-se a calcular $\pi$ com um maior número de casas decimais.

APIC/HULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES



Computador ENIAC, Universidade da Pensilvânia, Estados Unidos, 1946.

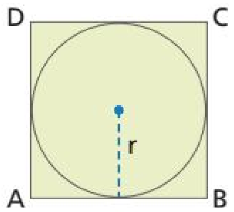
# ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** O comprimento do raio de uma circunferência corresponde, em centímetro, a uma das raízes da equação $x^2 - 16x - 720 = 0$. Qual é o comprimento dessa circunferência? (Use: $\pi = 3{,}14$.)

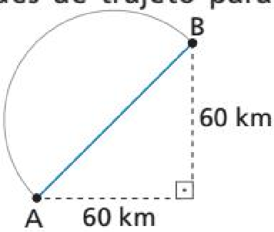
**2.** A medida do raio de uma circunferência corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, cujos lados congruentes medem $10\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, calcule o comprimento dessa circunferência. (Use: $\pi = 3{,}14$.)

**3.** Suponha que o quadrado ABCD da figura tenha 360 cm de perímetro. Qual é o valor de *r* e qual o comprimento da circunferência inscrita nesse quadrado? (Use: $\pi = 3{,}14$.)




**4.** Ao percorrer uma distância de 6 280 m, Fernando dá 20 voltas completas em uma pista circular. Qual é o comprimento do raio da pista? (Use: $\pi = 3{,}14$.)

**5.** Deseja-se construir um oleoduto para ligar duas cidades, *A* e *B*. Sabe-se que há duas possibilidades de trajeto para esse oleoduto: em linha reta ou em arco (formando uma semicircunferência), conforme a figura ao lado.

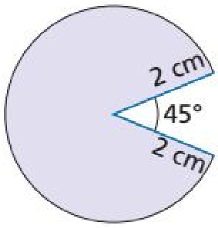



Sabendo que o trajeto em linha reta tem o custo de 2 700 reais por quilômetro, e o trajeto em arco custa 1 600 reais por quilômetro, qual dos dois trajetos é mais barato? (Use: $\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\pi = 3$.)

**6.** Em uma circunferência de 25 cm de raio, um arco tem 60° e comprimento *x*. Calcule o valor aproximado de *x*. (Use: $\pi = 3{,}14$.)

**7.** Caminhando 50,24 m em uma praça circular, Deborah descreve um arco de 72°. Qual é o diâmetro da praça? (Use: $\pi = 3{,}14$.)

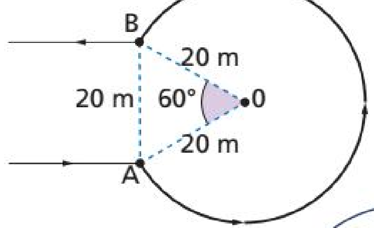
**8.** Em um jogo eletrônico, o personagem tem a forma de uma região circular de raio 2 cm. A parte que falta no círculo é a boca do personagem.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Qual é o comprimento do fio que contorna essa região circular? (Use: $\pi = 3{,}14$.)

**9.** Percorrendo uma estrada de 20 m de largura, um veículo inicia um retorno em um ponto *A* e executa a trajetória circular representada pela figura, cujo raio é 20 m. Quantos metros, aproximadamente, o veículo percorreu no arco $\overset{\frown}{AB}$? (Use $\pi = 3{,}14$.)




**DESAFIO**

Junte-se a um colega e resolvam as questões no caderno.


MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

**10.** Sabendo que 1 polegada equivale, aproximadamente, a 2,54 cm, a quantos centímetros corresponde uma volta do pneu da bicicleta de Helena? (Use: $\pi = 3{,}14$.)

**11.** No último domingo, Helena andou 4 km com sua bicicleta. Quantas voltas, aproximadamente, deu cada pneu?

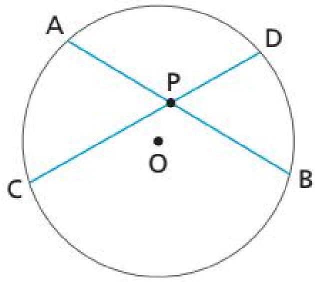
**12.** De casa ao clube, ida e volta, cada pneu dá 2 000 voltas. A que distância aproximada da casa de Helena fica o clube?

CAPÍTULO 4

# RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência também apresenta relações métricas entre seus elementos. Vejamos algumas dessas relações.

## Relação entre cordas

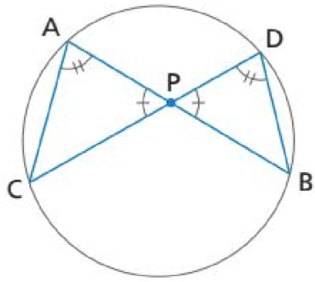



Na circunferência a seguir, destacamos duas cordas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que se cruzam no ponto *P*, interno à circunferência.

Dessa maneira, ficam determinados dois segmentos de reta sobre cada uma dessas cordas. Podemos, então, estabelecer uma relação métrica entre esses segmentos, como veremos a seguir.

Considerando os triângulos APC e DPB, temos:

- $A\hat{P}C \cong D\hat{P}B$ (são ângulos o.p.v.)
- $\hat{A} \cong \hat{D}$ (são ângulos inscritos no mesmo arco)




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

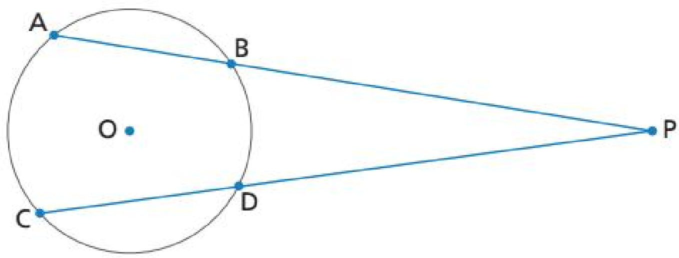
Ângulos inscritos em uma circunferência, e que determinam um mesmo arco, têm a mesma medida.

Como todos os pares de triângulos que têm dois ângulos internos, respectivamente congruentes, são semelhantes, temos: $\triangle APC \sim \triangle DPB$. Portanto:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

## Relação entre segmentos secantes

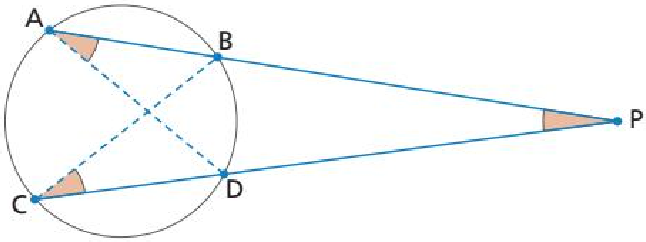
Na circunferência a seguir, temos duas secantes traçadas a partir de um mesmo ponto exterior *P*.




$\overline{PA}$ é um segmento de reta secante, e $\overline{PB}$ é a parte desse segmento externa à circunferência.

$\overline{PC}$ é um segmento de reta secante, e $\overline{PD}$ é a parte desse segmento externa à circunferência.

Entre esses quatro segmentos que acabamos de destacar, podemos estabelecer mais uma relação métrica.



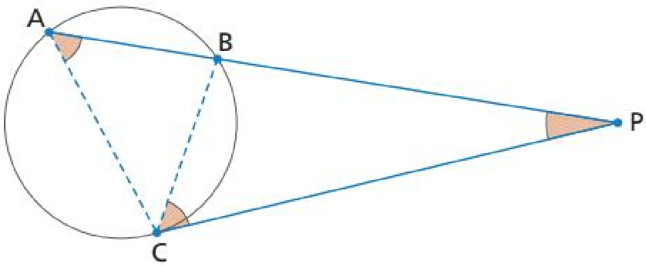

Considerando o $\triangle PAD$ e o $\triangle PCB$, temos:

- $\hat{P}$ (ângulo comum)
- $\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos inscritos no mesmo arco)

Então: $\triangle PAD \sim \triangle PCB$. Portanto:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

# Relação entre segmentos secante e tangente




Na circunferência ao lado, temos dois segmentos, um segmento secante e um segmento tangente, traçados a partir de um mesmo ponto externo *P*.

$\overline{PA}$ é um segmento de reta secante, e $\overline{PB}$ é a parte desse segmento externa à circunferência.

$\overline{PC}$ é um segmento de reta tangente.

Entre esses três segmentos que acabamos de destacar também podemos estabelecer uma relação métrica, como veremos a seguir.

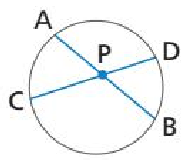
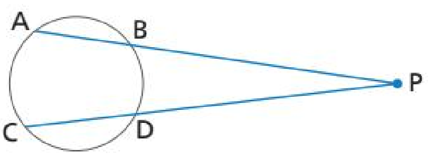
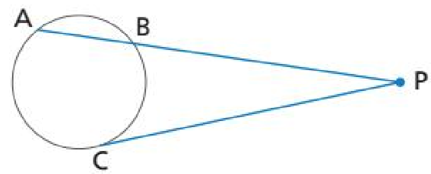
Considerando $\triangle PAC$ e $\triangle PCB$, temos:

- $\hat{P} \equiv \hat{P}$ (ângulo comum)
- $\hat{A} \cong \hat{C}$

Assim, temos: $\triangle PAC \sim \triangle PCB$. Portanto:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PC^2 = PA \cdot PB$$

Vamos resumir as três relações no quadro a seguir.

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ | $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ | $PC^2 = PA \cdot PB$ |

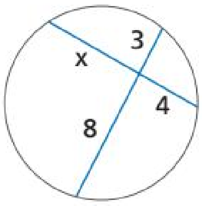
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

## ATIVIDADES

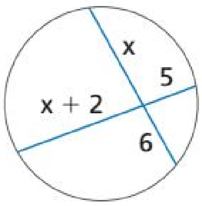
Responda às questões no caderno.

**1.** Usando as relações métricas na circunferência, calcule a medida $x$ indicada em cada uma das figuras.

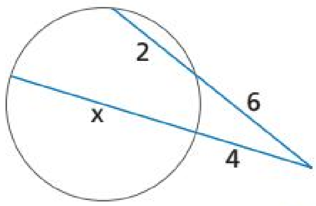
**a)**



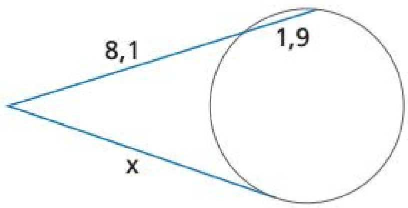

**b)**



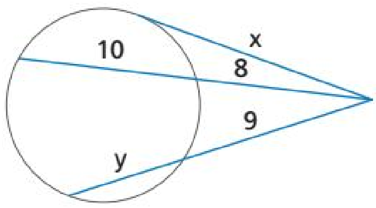

**c)**



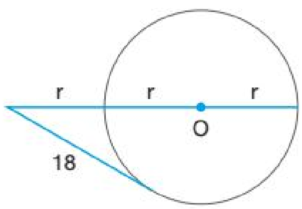

**d)**



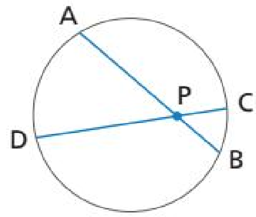

**2.** Considerando a figura, determine o valor da expressão $x + y$.




**3.** Determine a medida $r$ do raio da circunferência da figura.




**4.** Na figura, $PA = 3x$, $PB = x + 1$, $PC = x$ e $PD = 4x - 1$.
Nessas condições, determine:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** a medida $x$;
**b)** o comprimento de cada uma das cordas.

**5.** O raio de uma circunferência é 6 cm. Desde um ponto *P* externo, traçamos um segmento tangente e um secante a essa circunferência. O segmento secante, que encontra a circunferência nos pontos *A* e *B*, passa pelo centro e é tal que a sua parte externa mede 8 cm. Determine a medida do segmento tangente que foi traçado a partir do ponto *P*.

**6.** Uma corda $\overline{AB}$, que mede 18 cm, corta uma corda $\overline{CD}$ de tal forma que os segmentos determinados sobre $\overline{CD}$ medem $x$ e $2x$ cm, respectivamente. Sabendo que a corda $\overline{CD}$ mede 12 cm, calcule as medidas dos segmentos determinados sobre a corda $\overline{AB}$.

**7.** Por um ponto *P*, distante 18 cm do centro de uma circunferência, traça-se um segmento secante que determina na circunferência uma corda $\overline{AB}$, que mede 8 cm. Se o comprimento do raio dessa circunferência é 12 cm, determine:
**a)** o comprimento do segmento secante traçado a partir do ponto *P*;
**b)** o comprimento da parte externa do segmento secante.

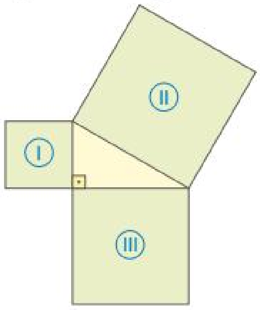
**8.** De um ponto *P*, situado a 3 cm de uma circunferência, traça-se um segmento tangente $\overline{PC}$ cuja medida é 9 cm. Nessas condições, determine o comprimento do raio dessa circunferência.

**9.** Em uma circunferência de centro *O* e raio 6 cm, traça-se uma corda $\overline{AB}$. Sobre essa corda, toma-se um ponto *M* de tal forma que $AM = 5$ cm e $OM = 4$ cm. Determine a medida do segmento $\overline{MB}$.

# RETOMANDO O QUE APRENDEU

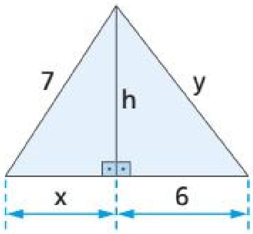
Responda às questões no caderno.

**1.** (UFSM-RS) Observe na figura os três quadrados identificados por (I), (II) e (III). Se a área do quadrado (I) é 36 cm² e a área do quadrado (II) é 100 cm² qual é, em centímetros quadrados, a área do quadrado (III)?



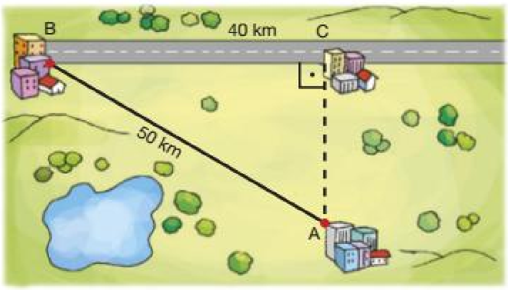

**a)** 64
**b)** 81
**c)** 49
**d)** 60
**e)** 80

**2.** De acordo com o triângulo abaixo, o valor de $x^2 + y^2$ é:




**a)** 45
**b)** 65
**c)** 75
**d)** 85
**e)** 95

**3.** (UCSal-BA) Na situação do esquema da figura, deseja-se construir uma estrada que ligue a cidade *A* à estrada $\overline{BC}$, com o menor comprimento possível.



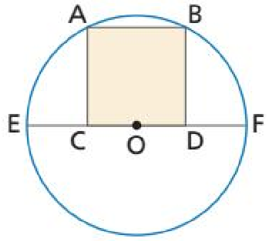

ILUSTRA CARTOON

Essa estrada medirá, em quilômetros:

**a)** 24 **c)** 30 **e)** 40
**b)** 28 **d)** 32

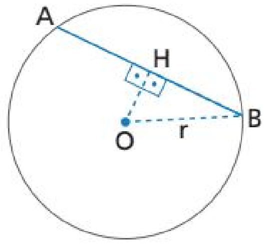
**4.** Considere que, na figura a seguir, o quadrado ABCD tem $16\sqrt{5}$ cm de perímetro, e *C* e *D* pertencem ao diâmetro $\overline{EF}$, de tal modo que $\overline{OC} \cong \overline{OD}$.

Nessas condições, a medida do raio da circunferência é, em centímetro:




**a)** 9
**b)** 10
**c)** 12
**d)** 15
**e)** 16

**5.** (PUC-MG) A corda $\overline{AB}$ da figura a seguir tem 16 cm de comprimento e dista 6 cm do centro da circunferência.




O diâmetro dessa circunferência é, em centímetros:

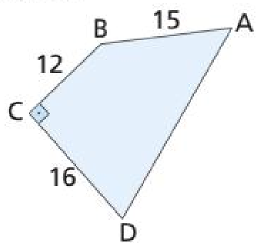
**a)** 20 **c)** 24 **e)** 28
**b)** 22 **d)** 26

**6.** (UEL-PR) As raízes da equação $x^2 - 21x + 108 = 0$ representam, em centímetros, as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. A medida da altura relativa à hipotenusa desse triângulo é, em centímetros, igual a:

**a)** 3,6 **c)** 4,8 **e)** 7,5
**b)** 4,5 **d)** 7,2

**7.** Para calcular a medida do lado $\overline{AD}$ na figura, pode-se dividi-la em dois triângulos: o triângulo BCD (retângulo em $\hat{C}$) e o triângulo ABD (retângulo em $\hat{B}$).

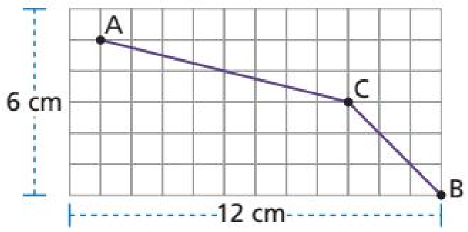
A medida do lado $\overline{AD}$ é:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** 25
**b)** 15
**c)** 30
**d)** 27
**e)** 32

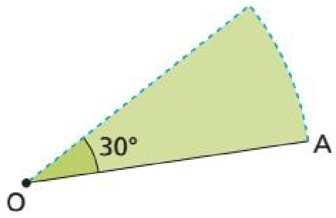
**8.** Na representação em escala a seguir, os quadrados são iguais, e cada centímetro representa 100 km. Um avião sai da cidade *A*, faz uma parada para abastecer na cidade *C* e chega à cidade *B*, conforme a figura.




Das alternativas dadas, assinale o valor mais próximo da distância percorrida pelo avião, de *A* até *B*, passando por *C*.

**a)** 1 000 km
**b)** 950 km
**c)** 1 150 km
**d)** 1 400 km
**e)** 1 250 km

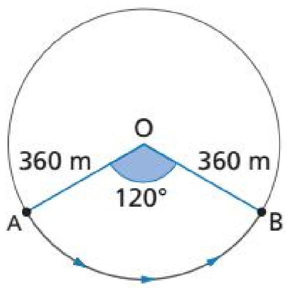
**9.** Um segmento OA descreve um arco de 30° em torno do ponto *O*, como indica a figura a seguir.




Se a medida do segmento OA é 5 cm, e adotando $\pi = 3$, qual é a distância percorrida pelo ponto *A*?

**a)** 2,5 **c)** 1,7 **e)** 4,5
**b)** 5,5 **d)** 3,4

**10.** Uma pessoa que sai do ponto *A* e vai até o ponto *B*, seguindo o arco $\overset{\frown}{AB}$, conforme esquema a seguir, percorre que distância? (Considere $\pi = 3$.)




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** 600 m **c)** 700 m **e)** 750 m
**b)** 630 m **d)** 720 m

## UM NOVO OLHAR

Nas relações métricas do triângulo retângulo estudadas nesta Unidade, conhecemos o teorema de Pitágoras e alguns aspectos históricos que o envolvem, além de suas aplicações, e complementamos os estudos com outras relações métricas do triângulo retângulo. Estudamos ainda a circunferência, o cálculo do comprimento de uma circunferência, um pouco da história do número $\pi$ e as relações métricas na circunferência.

Na abertura, vimos uma aplicação do teorema de Pitágoras em uma situação que implica medidas inacessíveis, que são calculadas por meio de triângulos. Vamos retomar as aprendizagens desta Unidade e refletir respondendo às questões a seguir no caderno.

- Dentre as diversas demonstrações para o teorema de Pitágoras, pesquise uma delas e registre a diferença entre a demonstração encontrada e a exposta nesta Unidade.
- As relações métricas são obtidas utilizando triângulos semelhantes. Como podemos justificar a semelhança desses triângulos?
- Na abertura desta Unidade, você foi convidado a apresentar a solução para o problema de um engenheiro. E agora, qual solução você daria ao engenheiro, se uma das medidas conhecidas é 21 m e a outra é 28 m? Qual é a distância que o engenheiro precisa calcular?
- Quais são os elementos de uma circunferência?

# 8 FIGURAS PLANAS, ESPACIAIS E VISTAS

A **impressora 3D**, uma das maiores invenções tecnológicas das últimas décadas, foi criada em 1984 pelo norte americano Charles Hull. Ele patenteou e fundou uma empresa que permanece até hoje como uma das líderes de mercado desse segmento, criando também diversas formas de impressão e iniciando a comercialização da tecnologia envolvida. Ela é um equipamento que imprime peças tridimensionais projetadas no computador.

Desenvolve-se um projeto que cria um modelo tridimensional utilizando um aplicativo de computador, para depois inseri-lo no *software* da impressora, que compila todos os dados, sistematiza em várias camadas e inicia a impressão.

O projetista deve definir também as configurações de dimensões da imagem e selecionar o material a ser utilizado.

Há diferentes tipos de impressoras: nas de fusão e acumulação a matéria-prima é fornecida por filamentos plásticos e, à medida que o material derrete, ele é injetado em uma base, criando as camadas, uma por uma, até que o objeto esteja totalmente pronto. Já as impressoras 3D por fusão a *laser* usam, comumente, plástico e metal, que em formato de um pó ultrafino é bombardeado por um *laser* até que entre em ponto de fusão para formar as camadas. As camadas são impressas de baixo para cima, unindo pedacinhos para formar o objeto.

O processo de impressão 3D pode fabricar inúmeros objetos e serem utilizados para diversas finalidades: objetos de decoração, peças de eletrodomésticos, roupas e sapatos, próteses, joias, miniaturas, maquetes, brinquedos, alimentos, entre outros.

GIOVANNI CANCEMI/SHUTTERSTOCK.COM

ANDREY SUSLOV/SHUTTERSTOCK.COM

MARINAGRIGORIVNA/SHUTTERSTOCK.COM

MARINAGRIGORIVNA/SHUTTERSTOCK.COM

ANGELATRIKS/SHUTTERSTOCK.COM

Responda à questão no caderno.

- Converse com um colega e discutam a importância da impressão 3D. Elabore um pequeno texto sobre as conclusões de vocês.

CAPÍTULO 1

# POLÍGONO REGULAR

Ao longo de seus estudos de Geometria, você já lidou com vários tipos de polígonos. Há um grupo de polígonos muito especiais do qual o quadrado e o triângulo equilátero fazem parte.

**PENSE E RESPONDA**

Responda no caderno às questões a seguir.

1. O que caracteriza um triângulo equilátero e um quadrado?
2. Explique com suas palavras o que é um polígono regular.
3. Qual é a medida de cada ângulo externo de um triângulo equilátero? E de um quadrado? E de um polígono regular de *n* lados?

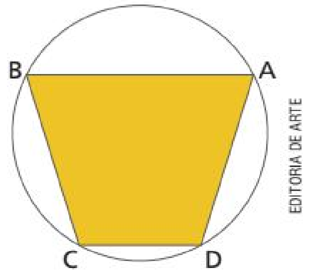
**Polígono regular** é todo polígono convexo que tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes entre si.

## Polígonos regulares inscritos na circunferência

**Corda** de uma circunferência é todo segmento de reta cujas extremidades são partes da circunferência.

Na circunferência a seguir, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são chamados de **cordas consecutivas**.

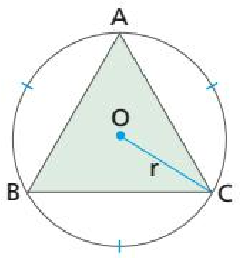
Quando consideramos 3, 4, 5, 6,... pontos distintos sobre uma circunferência, as cordas consecutivas que ligam esses pontos determinam **polígonos inscritos** nessa circunferência, como o polígono ABCD.



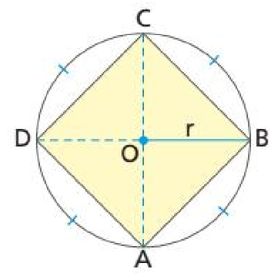
Quando dividimos uma circunferência em $n$ arcos congruentes (com $n > 2$), as cordas consecutivas delimitam um **polígono regular inscrito**, de $n$ lados, nessa circunferência.

Veja alguns polígonos regulares inscritos em uma circunferência:

Em uma circunferência dividida em três arcos congruentes, as três cordas consecutivas delimitam um **triângulo equilátero inscrito**.



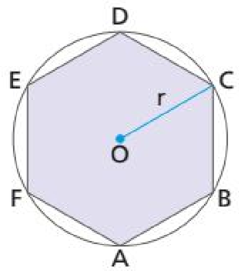

Em uma circunferência dividida em quatro arcos congruentes, as quatro cordas consecutivas delimitam um **quadrado inscrito**.




## Elementos de um polígono regular inscrito

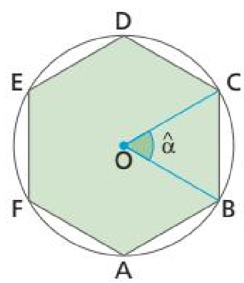
Vamos conhecer os elementos de um polígono regular inscrito.

Na figura abaixo, o raio de comprimento $r$ da circunferência em que está inscrito o polígono regular é também chamado **raio do polígono regular**.

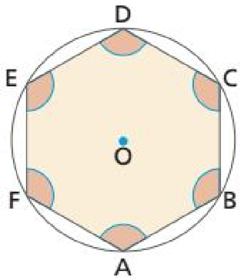



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O ângulo de medida $\alpha$, cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono inscrito, chama-se **ângulo central do polígono regular**. Sua medida $\alpha = a_c$ é dada por $a_c = \dfrac{360°}{n}$, em que $n$ é o número de lados do polígono inscrito.

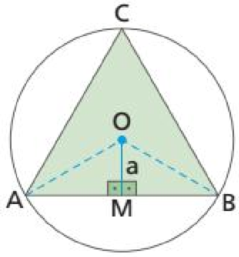


Em um polígono regular, inscrito ou não em uma circunferência, todos os **ângulos internos** são congruentes e, se o polígono tem $n$ lados, a medida $a_i$ de cada um dos ângulos é dada por $a_i = \dfrac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$.




O segmento que vai do centro $O$ da circunferência até o ponto médio $M$ de um lado do polígono regular inscrito chama-se **apótema do polígono regular**. Sua medida é, normalmente, representada por $a$.

Como o triângulo AOB da figura é isósceles, o apótema $\overline{OM}$ representa a altura, a mediana e a bissetriz relativas ao lado $\overline{AB}$ desse triângulo.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

## Propriedades de um polígono regular

Dois polígonos regulares que têm o mesmo número de lados são semelhantes, pois têm os ângulos internos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Assim, podemos destacar as propriedades a seguir.

**1ª propriedade**

Em dois polígonos regulares inscritos e com a mesma quantidade de lados, os perímetros são proporcionais aos comprimentos dos respectivos raios.

**2ª propriedade**

Em dois polígonos regulares inscritos e com a mesma quantidade de lados, os perímetros são proporcionais às medidas dos respectivos lados.

**3ª propriedade**

Em dois polígonos regulares inscritos e com a mesma quantidade de lados, os perímetros são proporcionais às medidas dos respectivos apótemas.

Acompanhe o exemplo.

**1** Dois hexágonos regulares estão inscritos em circunferências de raios 14 cm e 21 cm. Se o perímetro do hexágono inscrito na circunferência menor é 84 cm, vamos determinar o perímetro do outro hexágono.

Indicando o perímetro desconhecido por $x$ e aplicando a 1ª propriedade, podemos escrever:

$$\frac{14}{84} = \frac{21}{x} \Rightarrow 14x = 84 \cdot 21 \Rightarrow x = \frac{84 \cdot 21}{14} \Rightarrow x = 126$$

Logo, o perímetro do outro hexágono regular é 126 cm.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Determine a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de cada um dos polígonos regulares inscritos.

**a)** Triângulo equilátero.

**b)** Quadrado.

**c)** Hexágono regular.

**d)** Octógono regular.

**2.** O perímetro de um polígono regular inscrito em uma circunferência, cujo raio mede *x*, é 60 cm. Sabe-se que um outro polígono regular com a mesma quantidade de lados está inscrito em uma circunferência de raio 25 cm e tem 150 cm de perímetro. Qual o valor de *x*?

**3.** Os perímetros de dois polígonos regulares com a mesma quantidade de lados são 48 cm e 60 cm, respectivamente. Quanto mede o apótema do segundo polígono, se o apótema do primeiro mede $4\sqrt{3}$ cm?

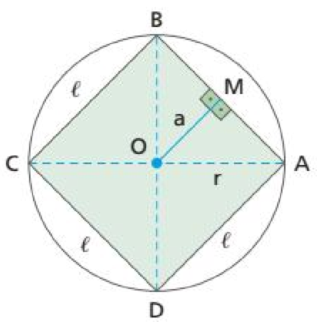
**4.** Os perímetros de dois polígonos regulares com a mesma quantidade de lados estão entre si assim como 2 está para 5. Sabendo que a medida do lado do segundo polígono é $20\sqrt{2}$ cm, calcule a medida do lado do primeiro polígono.

**5.** Os perímetros de dois polígonos regulares com a mesma quantidade de lados são, respectivamente, 28,28 cm e 28 cm. Quanto mede o raio e o apótema do primeiro polígono, sabendo que o raio e o apótema do segundo medem, respectivamente, $3{,}5\sqrt{2}$ cm e 3,5 cm?

# Relações métricas

Considerando a medida $\ell$ do lado de um polígono regular inscrito, a medida a do apótema do mesmo polígono e o comprimento *r* do raio da circunferência em que esse polígono está inscrito, podemos estabelecer algumas relações métricas. Vamos ver algumas a seguir

## Quadrado inscrito




EDITORIA DE ARTE

No quadrado inscrito, temos:

- $\ell$ = medida do lado do quadrado
- a = medida do apótema do quadrado
- r = comprimento do raio

Podemos, pelo teorema de Pitágoras, relacionar o lado e o apótema do quadrado com o raio da circunferência. Veja:

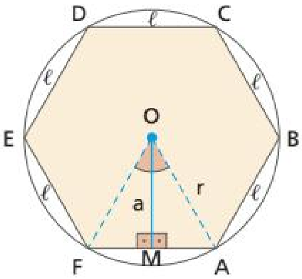
Considerando o $\triangle$BOA da figura:

$$\ell^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{2}$$

Considerando o $\triangle$OMA da figura:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = a^2 + \frac{2r^2}{4} \Rightarrow a^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4} \Rightarrow a^2 = r^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

## Hexágono regular inscrito




No hexágono regular inscrito, temos:

- $\ell$ = medida do lado do hexágono
- a = medida do apótema do hexágono
- r = comprimento do raio da circunferência

Sabemos que o $\triangle OFA$ é equilátero. Assim, sabemos que $MA = \frac{r}{2}$, pois FA = r, ou seja:

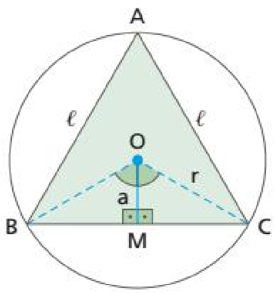
$$\ell = r$$

Assim:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = a^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = r^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow a^2 = r^2 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

## Triângulo equilátero inscrito




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

No triângulo equilátero inscrito, temos:

- $\ell$ = medida do lado do triângulo
- a = medida do apótema do triângulo
- r = comprimento do raio

Observe que o $\triangle AMO$ e o $\triangle CMO$ são semelhantes pelo critério AA, podemos escrever que:

$$\frac{\ell}{r} = \frac{\frac{\ell}{2}}{a} \Rightarrow a = \frac{r}{2}$$

Com isso, podemos escrever:

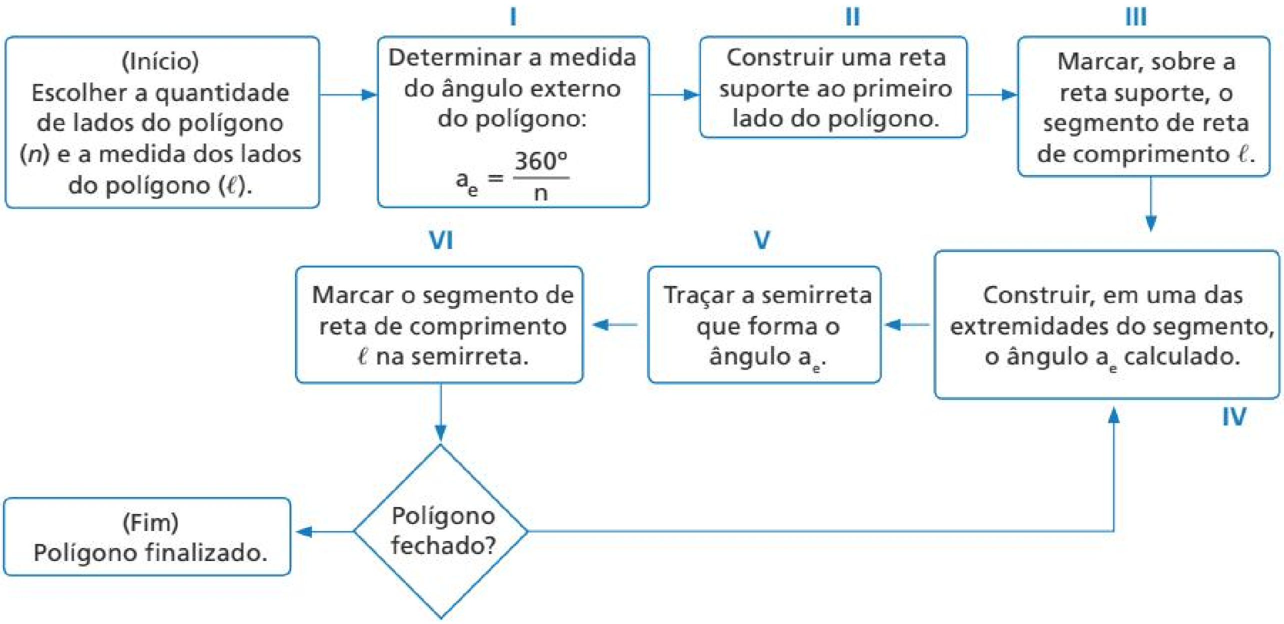
$$r^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \frac{\ell^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{4} = r^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = r\sqrt{3}$$

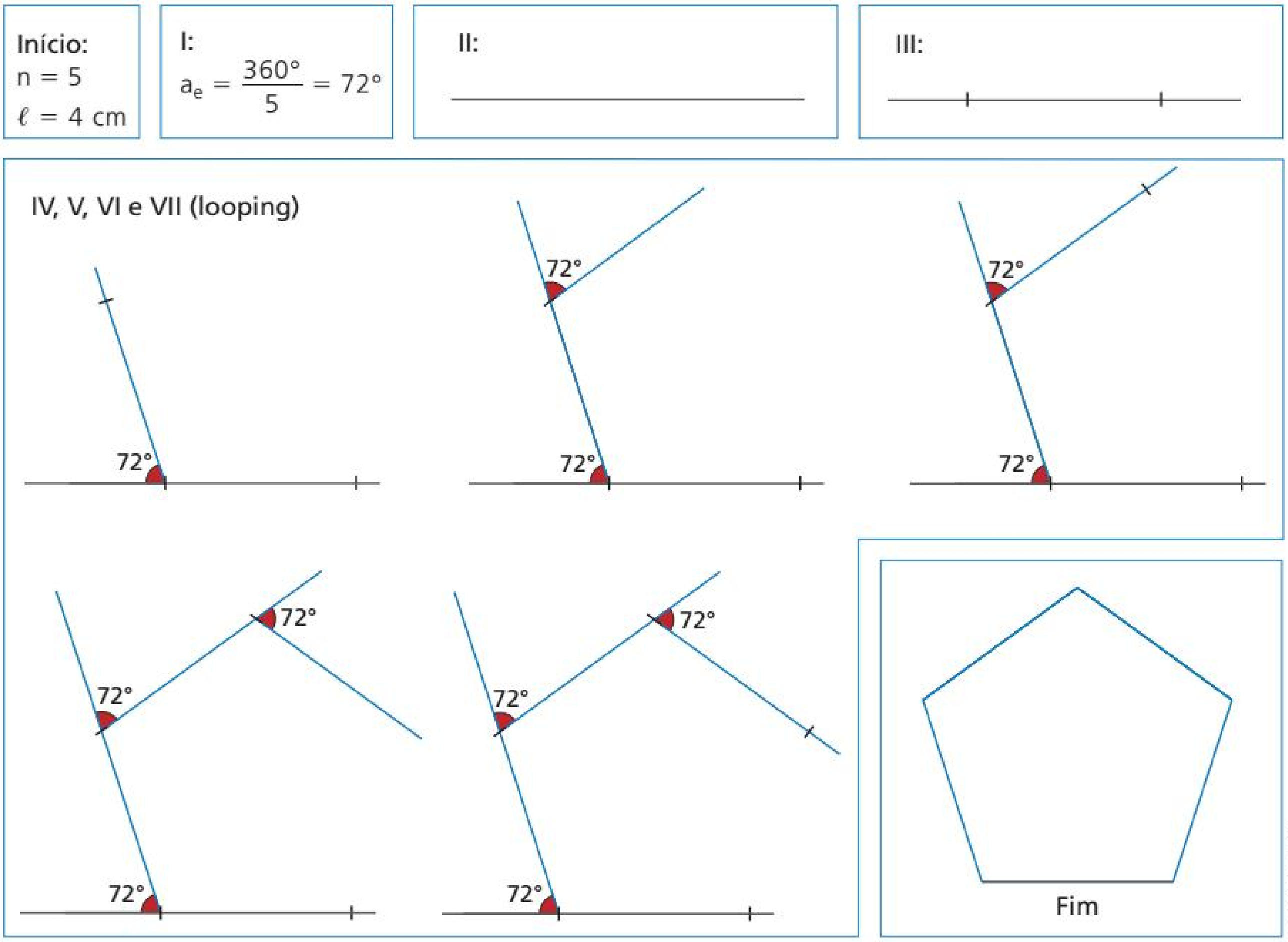
# Construção de polígonos regulares

Acompanhe as etapas para a construção de um polígono regular de *n* lados, com instrumentos de desenhos, conhecida a medida $\ell$ de seu lado.

Fluxograma para construir um polígono regular de *n* lados




Seguindo as etapas de construção descritas no fluxograma, construímos um polígono regular qualquer. Observe, a seguir, como ficaria a construção de um pentágono regular.




EDITORIA DE ARTE

- Agora é sua vez! Escolha um valor para *n*, um para ℓ e construa um polígono regular de lado *n*.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Em uma circunferência de 80 cm de diâmetro, calcule a medida do lado de:

**a)** um quadrado inscrito nessa circunferência;

**b)** um hexágono regular inscrito nessa circunferência;

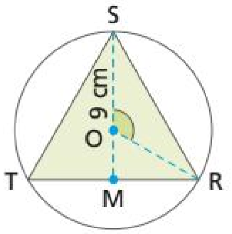
**c)** um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência.

**2.** Determine a medida do lado de um quadrado e de um triângulo equilátero inscritos em uma circunferência de 50 cm de raio. (Use $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$.)

**3.** Um quadrado está inscrito em uma circunferência que tem 44 cm de raio. Qual é a área desse quadrado?

**4.** Um triângulo equilátero está inscrito em um vitral circular, na parede de um teatro. Se o raio da circunferência tem 25 cm, qual é a medida do lado do triângulo equilátero? (Use $\sqrt{3} = 1,73$.)

**5.** Considerando que a figura a seguir representa um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência, calcule:




**a)** a medida do ângulo ROS;

**b)** a medida do segmento RS;

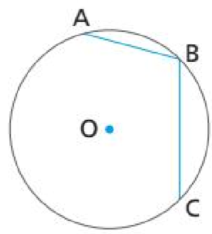
**c)** a medida do segmento OM;

**d)** a medida do segmento SM.

**6.** O comprimento de uma circunferência é 157 cm. Um hexágono regular de lado x cm e apótema y cm está inscrito nessa circunferência. Considerando $\sqrt{3} = 1,73$, determine o valor de x + y.

**7.** Sabe-se que o lado de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio *r* mede $40\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, elabore duas questões e troque com um colega. Cada um resolve as questões que o outro criou.

**8.** Na figura, o raio da circunferência mede 3 cm, $\overline{AB}$ representa o lado de um hexágono regular inscrito, e $\overline{BC}$ representa o lado de um quadrado inscrito.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nessas condições, determine:

**a)** a medida de $\overline{AB}$;

**b)** a medida de $\overline{BC}$, considerando $\sqrt{2} = 1,4$;

**c)** a distância que se percorre indo de *A* até *C*, passando por *B*.

**9.** Em uma circunferência de 100 cm de raio, estão inscritos um quadrado e um triângulo equilátero. A medida do lado do quadrado representa quantos por cento da medida do lado do triângulo? (Use $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$.)

**10.** Uma pessoa observa um vitral com desenho de um triângulo equilátero inscrito em um círculo de 40 cm de raio. Se a área de um triângulo equilátero é dada pela expressão $\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, qual é a área do triângulo observado por essa pessoa? (Use $\sqrt{3} = 1,73$)

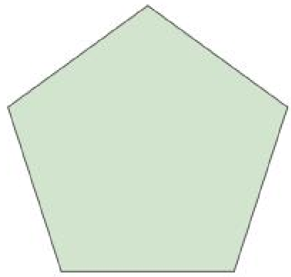
**11.** Em uma circunferência de 50,24 cm de comprimento estão inscritos um triângulo equilátero e um hexágono regular. Considerando $\sqrt{3} = 1,7$ e $\pi = 3,14$, determine:

**a)** a medida do lado e o perímetro do triângulo equilátero;

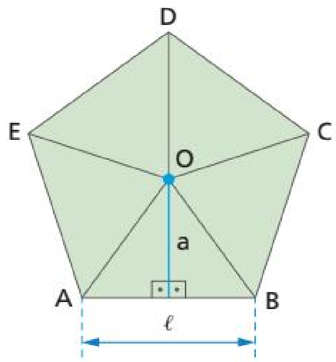
**b)** a medida do apótema e o perímetro do hexágono regular.

# Área de um polígono regular

Vamos considerar o pentágono regular a seguir.



A partir do centro, vamos decompor esse pentágono em cinco triângulos isósceles e congruentes. São eles: $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOE$, $\triangle AEO$.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Em cada um desses triângulos, temos:

- a base do triângulo, que corresponde ao lado do polígono e cuja medida indicaremos por $\ell$;
- a altura relativa à base do triângulo, que corresponde ao apótema do polígono e cuja medida indicaremos por *a*.

A área ($A_\triangle$) de cada um desses cinco triângulos é dada por $A_\triangle = \frac{\ell \cdot a}{2}$.

Como são cinco triângulos, a área do polígono é dada por:

$$5 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}, \text{ ou } \frac{5\ell a}{2}, \text{ ou, ainda, } \frac{5\ell}{2} \cdot a$$

Como $5\ell$ é o perímetro do pentágono regular, temos que $\frac{5\ell}{2}$ representa a metade do perímetro ou o **semiperímetro** do pentágono regular.

Assim:

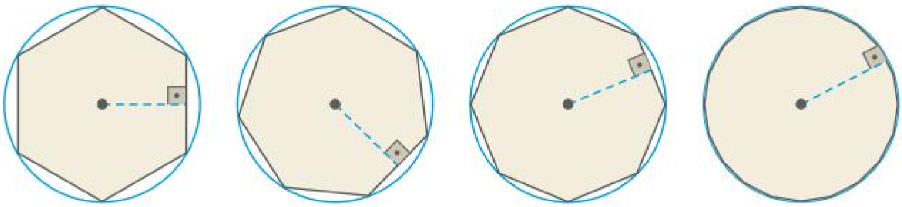
$$\text{área do pentágono regular} = \underbrace{\frac{5\ell}{2}}_{\text{semiperímetro}} \cdot \underbrace{a}_{\text{medida do apótema}}$$

Podemos dizer que para todos os polígonos regulares, temos:

> área do polígono regular = semiperímetro × medida do apótema

# Área do círculo e de um setor circular

Observe a sequência de polígonos regulares inscritos em uma circunferência:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

À medida que o número de lados aumenta, o polígono regular inscrito se aproxima do círculo determinado pela circunferência. Isso faz com que a área desse polígono regular se aproxime da área do círculo. Assim:

- o perímetro do polígono regular se aproxima do comprimento ($C = 2\pi r$) da circunferência.
- o semiperímetro do polígono regular tende ao valor $\frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}}$ ou seja, $\pi r$.
- o apótema do polígono regular tende a ser o raio.

Assim, a área do polígono regular tende a coincidir com a área do círculo. Logo:

$$\text{área do círculo} = \pi r \cdot r \quad \text{ou} \quad \text{área do círculo} = \pi r^2$$

$$(\pi r = \text{semiperímetro e } r = \text{medida do apótema})$$

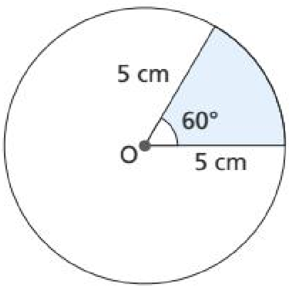
Usando a fórmula da área do círculo, vamos resolver as situações a seguir.

**1** Uma folha de papelão tem a forma circular de raio 21 cm. Qual é, em cm², a área ocupada por essa folha? (Usar: $\pi = 3,14$)

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot (21)^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 441 \Rightarrow A = 1384,74$

A área ocupada por essa folha é 1384,74 cm².

**2** A região colorida de azul na figura chama-se **setor circular**.




$$\begin{matrix} 360° & \text{——} & \pi r^2 \\ 60° & \text{——} & x \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 360° & \text{——} & 3,14 \cdot 5^2 \\ 60° & \text{——} & x \end{matrix}$$

Daí, temos a proporção:

$$\frac{\cancel{360°}^{\,6}}{\cancel{60°}_{\,1}} = \frac{78,5}{x} \Rightarrow 6x = 78,5 \Rightarrow x = \frac{78,5}{6} \Rightarrow x \simeq 13,08$$

Logo, a área do setor é, aproximadamente, 13,08 cm².

# ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Uma região poligonal, em forma de hexágono regular, foi recortada de uma folha de cartolina. O lado do hexágono recortado mede 80 cm. Nessas condições, determine:

**a)** o semiperímetro desse hexágono;

**b)** a medida *a* do apótema do hexágono, sabendo que $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$;

**c)** a área da região poligonal, considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$.

**2.** Sabendo que um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de raio 18 cm, determine:

**a)** a medida do lado desse hexágono;

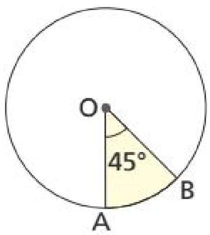
**b)** o semiperímetro desse hexágono;

**c)** a medida do apótema desse hexágono;

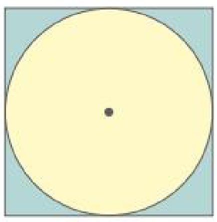
**d)** a área desse hexágono.

**3.** Um disco de cobre tem 80 cm de diâmetro. Qual é a área desse disco?

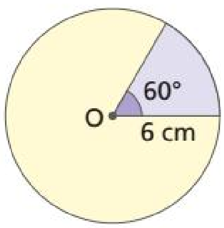
**4.** Considere o setor circular (região colorida de amarelo) na circunferência da figura. Se *O* é o centro do círculo, e OA = 8 cm, qual é a área do setor circular?



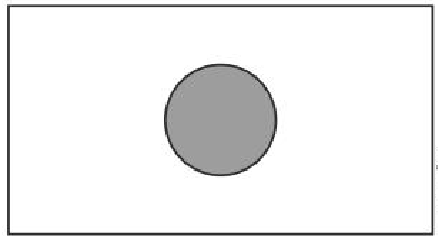

**5.** A figura nos mostra um círculo inscrito em um quadrado. Se o perímetro desse quadrado é 48 cm, calcule a área do círculo.



**6.** Qual é a área do setor circular colorido de amarelo na figura?



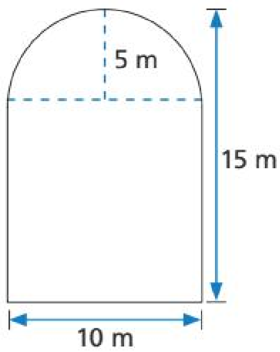

**7.** Uma pessoa pretende colocar um tapete circular no centro de uma sala retangular, conforme mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

As dimensões da sala são 4,5 m (largura) e 8 m (comprimento), e o diâmetro do tapete equivale a $\frac{1}{4}$ do comprimento da sala. Nessas condições, qual é a área da superfície da sala que não ficará coberta pelo tapete?

**8.** Um jardineiro cultiva suas plantas em um canteiro cuja forma é a da figura a seguir, em que uma parte é uma semicircunferência. Para cobrir todo o canteiro, ele calculou que precisaria comprar uma lona com 170 m² de área. Você pode afirmar que a área da lona é suficiente para cobrir esse canteiro?




**9.** Um vazamento no tanque de um navio provoca o aparecimento de uma mancha de óleo circular. O raio *r* da mancha, *t* minutos depois do início do vazamento, é dado, em metros, pela fórmula $r = \frac{\sqrt{t}}{5}$.

**a)** Qual é, em metros, o raio da mancha após 4 minutos do início do vazamento?

**b)** Nesse momento, qual é, em m², a área da mancha?

# TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

## Leitura e construção de gráfico de setores

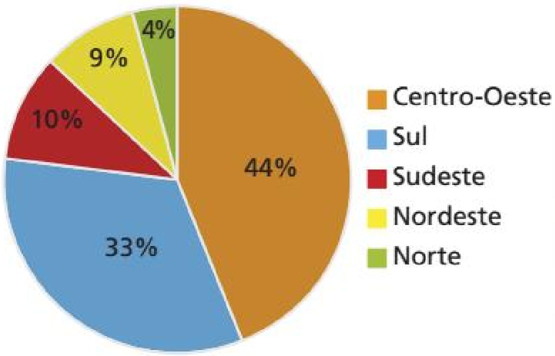
O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) faz, todos os anos, uma estatística da produção agrícola em diferentes níveis geográficos – nacional, regional e metropolitano – e divulga seus resultados em periódicos chamados Indicadores IBGE. As informações são apresentadas em textos, tabelas e gráficos para facilitar o entendimento.

No relatório de agosto de 2018, estimou-se que o Brasil colheria 226 milhões de toneladas de grãos até o fim daquele ano. Esses grãos são os cereais, as leguminosas e as oleaginosas, e os três principais produtos desse grupo são o arroz, o milho e a soja, cujas safras representam 92,8% da estimativa da produção total.

Para fazer uma análise e comparar a produção de cada região com o todo, um tipo de gráfico adequado é o gráfico de setores.

Veja, no gráfico, a participação de cada região brasileira nessa produção.

**Participação na produção nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, segundo as Grandes Regiões e Unidades da Federação (agosto, 2018)**




EDITORIA DE ARTE

Fonte: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Producao_Agricola/Levantamento_Sistematico_da_Producao_Agricola_%5Bmensal%5D/Fasciculo_Indicadores_IBGE/estProdAgri_201808.pdf>. Acesso em: 7 nov. 2018.

Considerando os dados apresentados no texto e no gráfico, responda às questões no caderno:

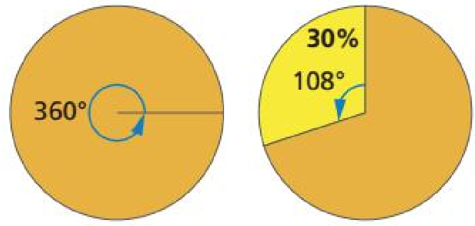
1. De quanto foi a produção estimada de grãos na região Sudeste em 2018, em milhões de toneladas?
2. Qual foi a região que teve a menor produção de grãos estimada por essa pesquisa? De quanto foi essa produção?
3. Construa uma tabela de distribuição de frequência da participação na produção nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, segundo as Grandes Regiões e Unidades da Federação, indicando na primeira coluna as Grandes Regiões e na segunda coluna a produção, em milhões de toneladas. Utilize uma casa decimal para arredondamento.
4. Com base na tabela que você construiu na questão 3, determine a média da produção por região, em milhões de toneladas.

Em um gráfico de setores, a porcentagem associada a cada setor circular é proporcional à área desse setor. Por exemplo, se um setor corresponde a 50% (metade) das vendas de uma empresa, a área desse setor circular deve corresponder à metade do círculo considerado na construção do gráfico. Esse fato nos auxilia a verificar se o gráfico está construído sem distorções.

Aveia em flocos do milho e sementes, e espigas de milho.

CHAMILLE WHITE/SHUTTERSTOCK.COM

Sabemos que a área do setor circular é proporcional à medida de seu ângulo central. Assim, se um setor corresponde a 30% da área do gráfico (círculo todo), o ângulo central deve corresponder a 30% de um giro de uma volta completa (360°) que gera o círculo, ou seja, 30% de 360°; que é 108°.




Desse modo, para construir um gráfico de setores podemos construir uma tabela com os dados da pesquisa em valores absolutos, as correspondentes porcentagens (valores relativos) e as medidas dos ângulos centrais de cada setor.

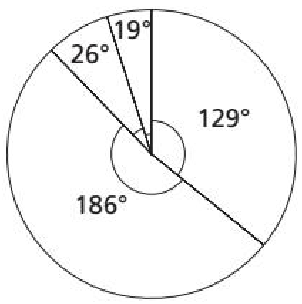
Vamos construir um gráfico de setores destacando os produtos agrícolas produzidos pelo Brasil em 2018 com base na tabela a seguir.

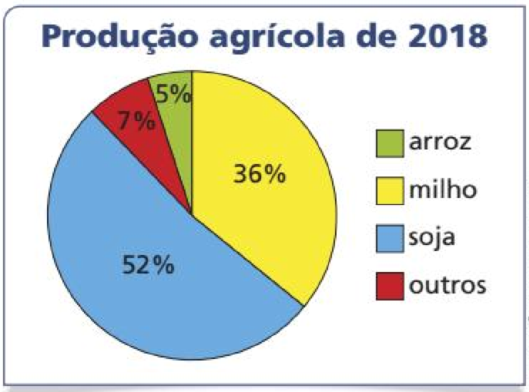
**Produtos agrícolas brasileiros – produção de 2018**

| Produto agrícola | Produção (em milhões de toneladas) | Porcentual correspondente | Medida do ângulo central de cada setor do gráfico |
|---|---|---|---|
| arroz | 11,8 | 5,2% ≃ 5% | 19° |
| milho | 81,0 | 35,8% ≃ 36% | 129° |
| soja | 116,8 | 51,7% ≃ 52% | 186° |
| outros | 16,4 | 7,3% ≃ 7% | 26° |
| Total | 226 | 100% | 360° |

Fonte: IBGE. **Em agosto, IBGE prevê safra 6,2% menor que a de 2017**. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/22525-em-agosto-ibge-preve-safra-6-2-menor-que-a-de-2017>. Acesso em: 21 nov. 2018.

Com o auxílio de compasso, régua e transferidor, construímos um círculo e demarcamos os setores de acordo com as medidas de seus ângulos centrais correspondentes. Depois pintamos cada setor com uma cor diferente, registramos a porcentagem relativa a cada setor e completamos o gráfico com a legenda de cores, o título e a fonte dos dados.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Fonte: IBGE. **Em agosto, IBGE prevê safra 6,2% menor que a de 2017**. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/22525-em-agosto-ibge-preve-safra-6-2-menor-que-a-de-2017>. Acesso em: 21 nov. 2018.

De acordo com o gráfico, responda às questões no caderno.

**5.** Qual foi a participação porcentual do milho na produção estimada de 2018?

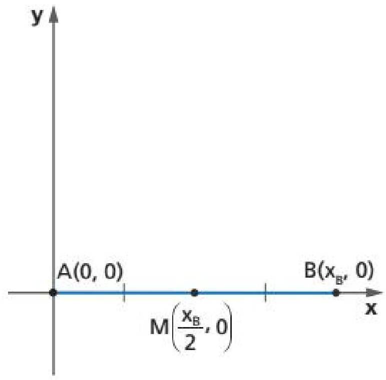
**6.** Qual é a cor do setor correspondente ao produto agrícola de maior produção em 2018? Que produto é esse? Essa produção corresponde a mais da metade ou a menos da metade do total?

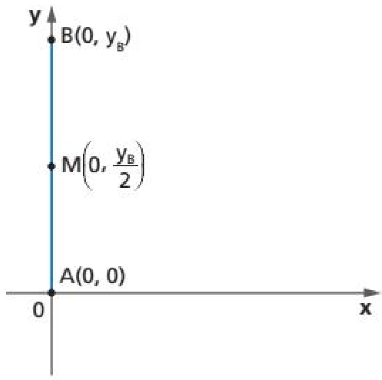
CAPÍTULO 2

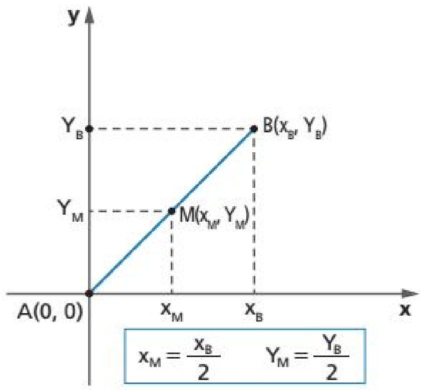
# REPRESENTAÇÕES NO PLANO CARTESIANO

Conhecendo as coordenadas cartesianas (x, y) das extremidades de um segmento de reta, podemos representá-lo em um plano cartesiano. Já vimos que o **ponto médio** de um segmento de reta é o ponto que divide o segmento em duas partes de mesma medida.

Consideremos o segmento AB em cada caso a seguir e seu ponto médio *M*. Vamos agora determinar as **coordenadas do ponto médio** de $\overline{AB}$.



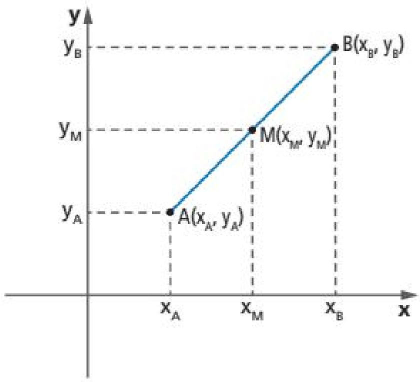




Então, temos, para uma situação qualquer:

$x_M$ é o valor médio de $x_A$ e $x_B$: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

$y_M$ é o valor médio de $y_A$ e $y_B$: $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

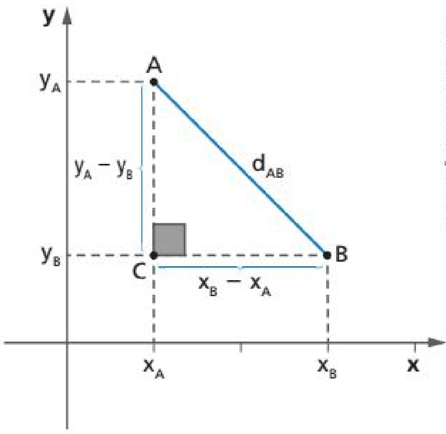



Conhecendo as coordenadas cartesianas (x, y) das extremidades de um segmento AB, também podemos determinar seu comprimento, que é a **distância ($d_{AB}$) entre os pontos A e B**. Para isso, vamos considerar o segmento AB representado ao lado.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos: $(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2$

Como $d_{AB} > 0$ para *A* distinto de *B*, obtemos:

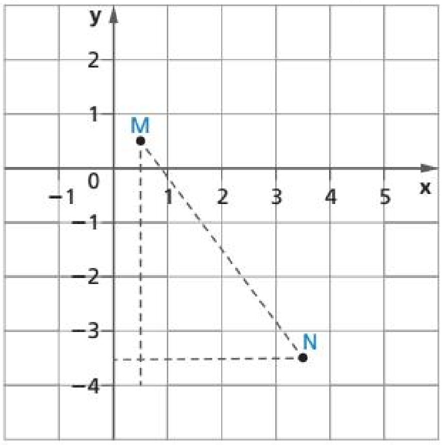
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}$$




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considere as situações a seguir.

**1** Qual é a distância entre o ponto M(0,5; 0,5) e o ponto N(3,5; −3,5)?




$$d_{MN} = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_M - y_N)^2}$$
$$d_{MN} = \sqrt{(3{,}5 - 0{,}5)^2 + [0{,}5 - (-3{,}5)]^2}$$
$$d_{MN} = \sqrt{(3)^2 + [4]^2}$$
$$d_{MN} = \sqrt{9 + 16}$$
$$d_{MN} = \sqrt{25} \quad (d_{MN} > 0)$$
$$d_{MN} = 5$$

**2** Determine o perímetro de um triângulo cujos vértices têm as coordenadas O(0, 0), P(−7, 0) e Q(−4, −3) e classifique esse triângulo quanto às medidas de seus lados.

$$d_{OP} = \sqrt{(-7 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$d_{OQ} = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$
$$d_{PQ} = \sqrt{[-4 - (-7)]^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Assim, o perímetro é: $7 + 5 + 3\sqrt{2} = 12 + 3\sqrt{2}$

Esse triângulo é escaleno, pois tem os três lados com medidas diferentes entre si.

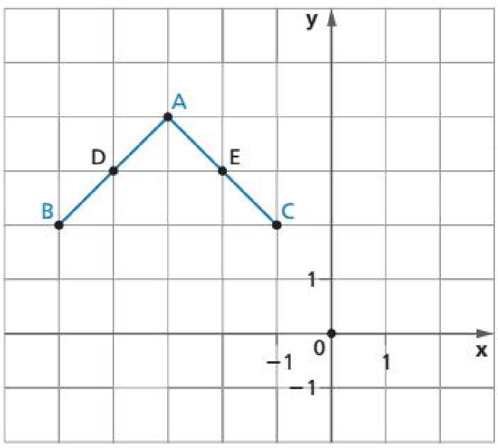
**SAIBA QUE**

No cálculo da distância entre dois pontos, como as diferenças entre as respectivas coordenadas estão ao quadrado, podemos tomar os valores envolvidos em qualquer ordem.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Na figura, os pontos *D* e *E* são pontos médios dos segmentos AB e AC, respectivamente.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** Dê as coordenadas de A, B e C.

**b)** Determine as coordenadas dos pontos *D* e *E*. Comprove que eles são os pontos médios dos respectivos segmentos.

**c)** Calcule o perímetro do triângulo ADE.

**d)** Classifique esse triângulo quanto às medidas dos lados e obtenha a sua área.

**2.** M(−0,5; −3) é ponto médio de $\overline{BC}$. Sabendo que B(2, −2), determine a medida do segmento BC.

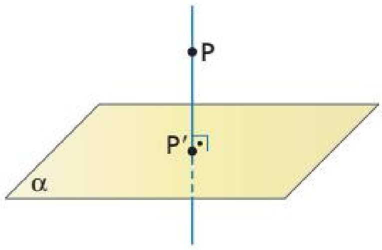
**3.** Elabore uma situação que envolva o cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta e da distância entre dois pontos. Em seguida, troque com um colega e cada um resolve a situação criada pelo outro.

CAPÍTULO 3

# FIGURAS ESPACIAIS

## Projeção ortogonal

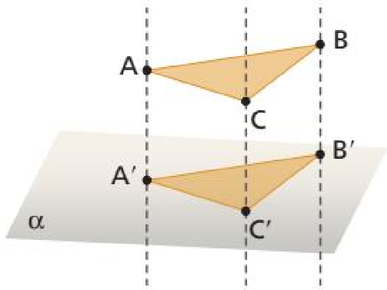
A projeção ortogonal de um ponto *P* sobre um plano $\alpha$ é o ponto de intersecção *P'* da reta perpendicular a esse plano e que passa por *P* (essa reta forma 90° com todas as retas do plano que passam por *P*). Se o ponto *P* pertence ao plano $\alpha$, então sua projeção é o próprio ponto *P*.




**Projeção ortogonal** é uma figura formada em um plano a partir de outra figura que pode, ou não, estar contida nesse plano.

A projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano é a figura formada pelas projeções ortogonais de todos os pontos da figura dada sobre esse plano.

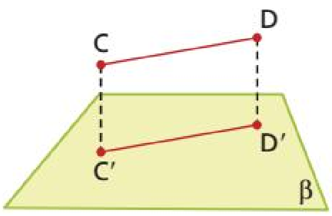
Na imagem ao lado, o triângulo A'B'C' (contido no plano $\alpha$) é a projeção ortogonal do triângulo ABC sobre o plano $\alpha$.



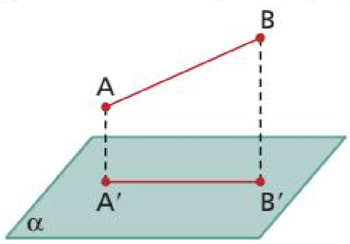

Desse modo, existe um vínculo entre os pontos da figura que se projeta com os pontos projetados, mas nem sempre a projeção ortogonal manterá toda a forma original da figura que se projeta.

Acompanhe os exemplos a seguir.

O segmento C'D' é a projeção ortogonal do segmento CD sobre o plano $\beta$. Nesse caso, como o segmento CD é paralelo ao plano $\beta$, sua projeção ortogonal $\overline{C'D'}$ também é um segmento de reta, que é congruente a ele (de mesma medida).




O segmento A'B' é a projeção ortogonal do segmento AB sobre o plano $\alpha$. Nesse caso, como o segmento AB é oblíquo (não é paralelo nem perpendicular) ao plano $\alpha$, sua projeção ortogonal A'B' também é um segmento de reta, que tem comprimento menor que o segmento inicial (que foi projetado).




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

# Vistas ortogonais

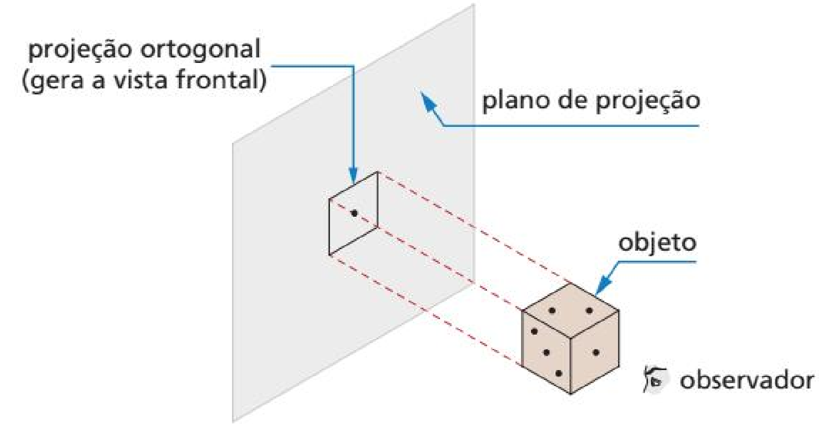
A representação de figuras não planas por meio de projeções ortogonais é feita por vistas dessa figura (objeto) tomadas de diferentes posições: vertical (vista frontal), horizontal (vista superior) e perfil (vista lateral – direita ou esquerda).

As projeções ortogonais são utilizadas para representar as figuras não planas por meio de figuras planas, que são as **vistas ortogonais** do objeto considerado. Assim, temos o desenho de um mesmo objeto, que se encontra no espaço, em planos diferentes. Desse modo, dispomos de dois ou mais pontos de vista diferentes do objeto observado.

**SAIBA QUE**

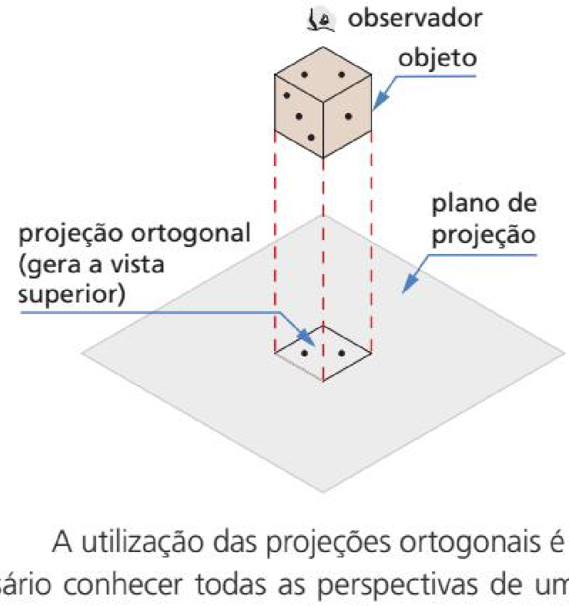
As projeções ortogonais também são denominadas **projeções ortográficas**.

Observe nas figuras abaixo as projeções que geram as vistas de um dado.

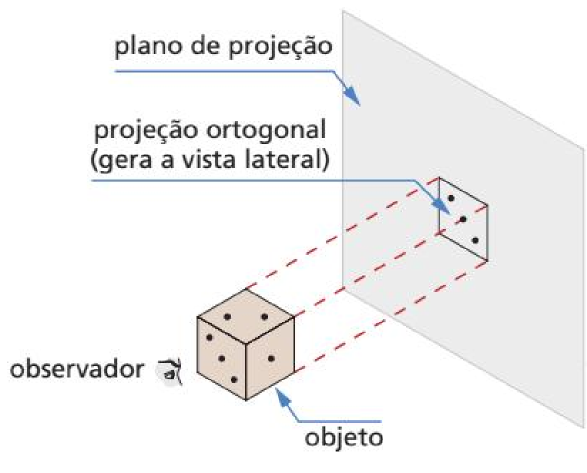



Esta projeção gera a **vista frontal** do objeto.

Esta outra projeção produz a **vista superior** do objeto:




Esta terceira projeção gera a **vista lateral** do objeto (no caso lateral esquerda):




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

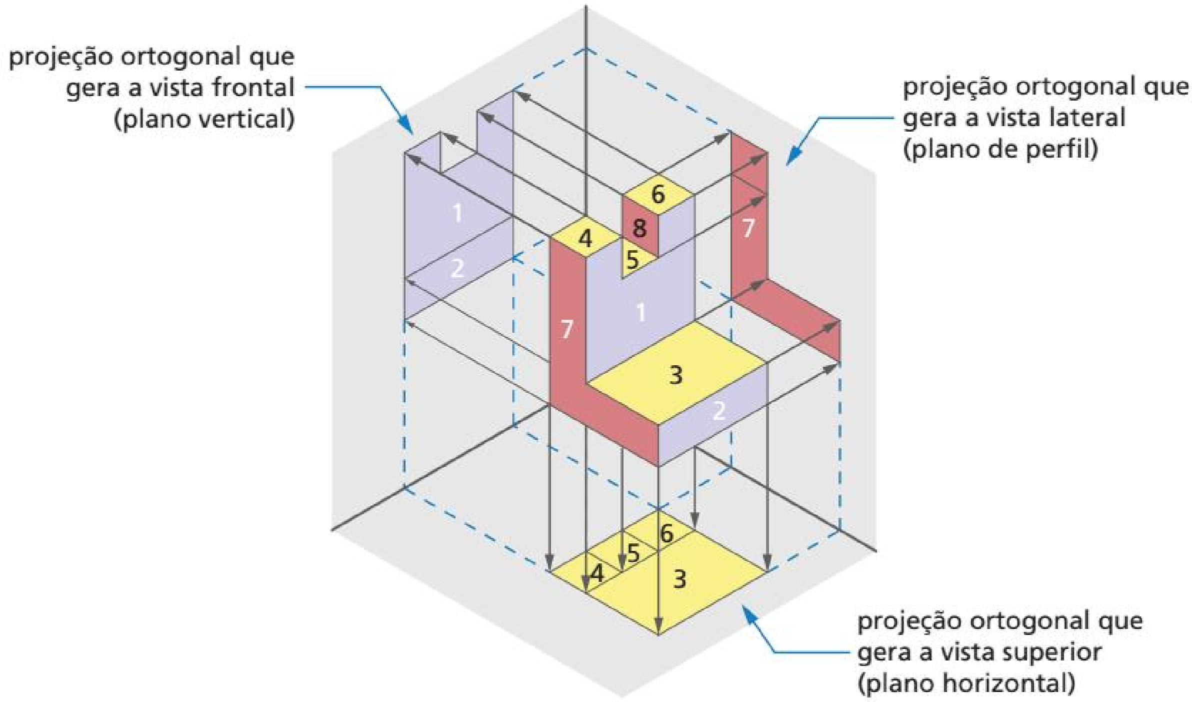
A utilização das projeções ortogonais é fundamental para o setor industrial, em que é necessário conhecer todas as perspectivas de um objeto antes de fabricá-lo. Também é utilizada em outras áreas, como na Arquitetura e no Urbanismo.

Na área de desenho técnico, a projeção ortogonal é indispensável para se obter a representação gráfica de um objeto.

Em uma projeção ortogonal de um objeto, as linhas projetantes (raios de visão) sempre têm direção ortogonal em relação ao plano de projeção, ou seja, formam com o plano um ângulo de 90°.

Dependendo da forma do objeto considerado, partes de sua superfície podem ficar ocultas em relação ao sentido de observação.

Observe as projeções abaixo.

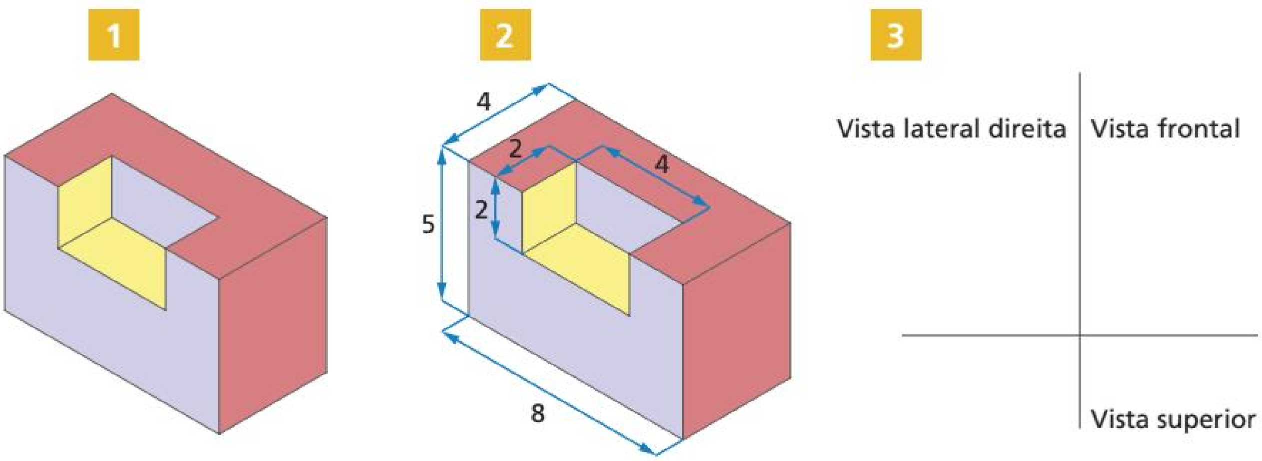



De maneira simplificada, vamos apresentar os passos para a obtenção das projeções que geram as vistas ortogonais de figura não plana.

**1º passo**: Definimos qual é a vista frontal do objeto, que determina a disposição das outras vistas. Geralmente é a vista com mais detalhes da forma do objeto ou a vista apresentada na posição de utilização da peça considerada.

**2º passo**: Visualizando a figura, identificamos as dimensões dela, definindo largura, altura e profundidade.

**3º passo**: Anotamos quais vistas serão usadas, imaginando os planos rebatidos.

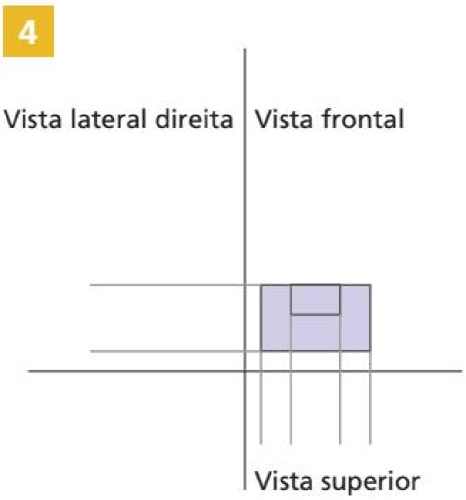


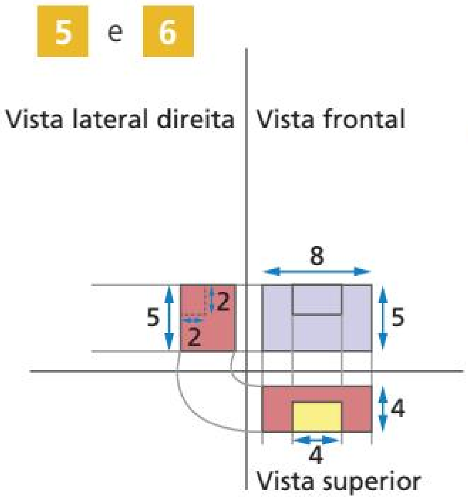

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**4º passo**: Desenhamos a vista frontal no local destinado a ela.

**5º passo**: Em seguida, desenhamos a vista superior, puxando linhas auxiliares (espessura fina).

**6º passo**: Depois, de maneira análoga, desenhamos a vista lateral direita do objeto.




**SAIBA QUE**

Linha tracejada representa um recorte na figura.

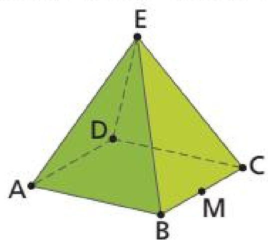
## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Avalie se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

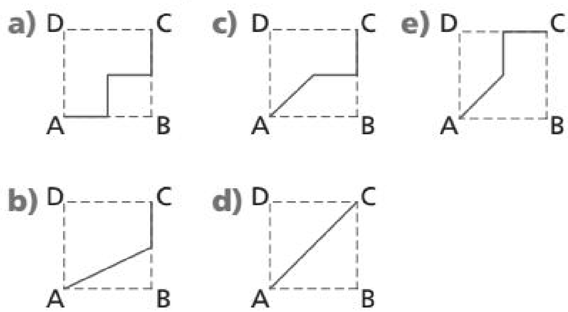
- A projeção ortogonal de um segmento de reta PQ sobre um plano $\alpha$ que não tem pontos comuns com $\overline{PQ}$ sempre é um segmento de reta.

**2.** (Enem) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide de base quadrangular.



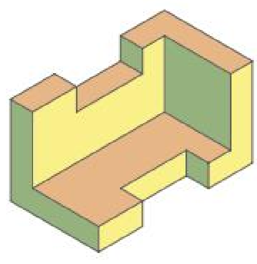

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto *A* ao ponto *E*, a seguir do ponto *E* ao ponto *M*, e depois de *M* a *C*.

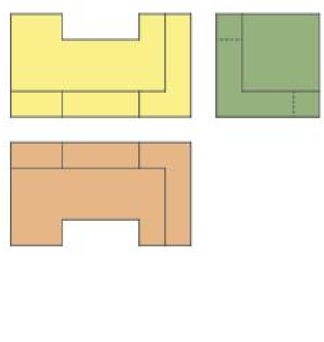
O desenho que Bruno deve fazer é:




**3.** Observe a peça representada.

Identifique cada vista ortogonal dessa peça apresentada no desenho abaixo pela respectiva cor.





ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

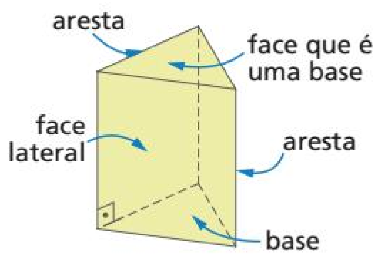
# Volume de prismas e de cilindros

Os **prismas** são sólidos do grupo dos poliedros, aqueles que têm apenas superfícies planas.

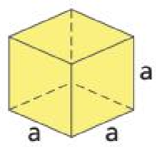
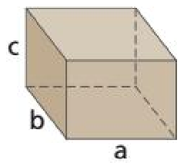
Um **prisma reto** é caracterizado por ter duas faces paralelas formadas por polígonos idênticos, que são suas bases, e as demais faces formadas por retângulos, que são suas faces laterais.

Em um prisma reto as arestas laterais são perpendiculares às bases.

Veja os exemplos a seguir.




Prisma reto de base triangular

| | |
|---|---|
| O cubo é um prisma reto cujas faces são todas quadradas.   O volume de um cubo é dado por: $V_{cubo} = \underbrace{a \cdot a}_{\text{área da base}} \cdot \underbrace{a}_{\text{altura}} = a^3$ | O paralelepípedo reto-retângulo é um prisma reto.   O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é dado por: $V_{paralelepípedo} = \underbrace{a \cdot b}_{\text{área da base}} \cdot \underbrace{c}_{\text{altura}}$ |

**SAIBA QUE**

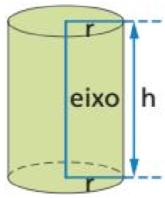
A altura de um prisma reto é a distância entre as bases paralelas.

De modo geral, o volume de um prisma reto é dado por: $V_{prisma} = \text{área da base} \cdot \text{altura}$.

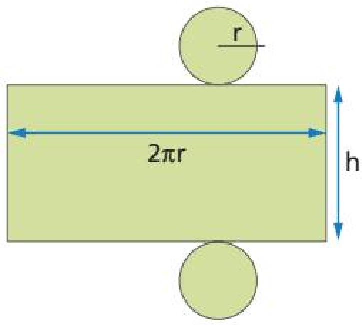
Os **cilindros** são sólidos do grupo dos corpos redondos, aqueles que têm superfície arredondada.

Um **cilindro circular reto** (ou simplesmente **cilindro reto**) é caracterizado por ter duas superfícies planas e paralelas formadas por círculos idênticos, que são suas bases.

O segmento de reta que liga os centros das bases (círculos) do cilindro é o eixo do cilindro. Em um cilindro reto, o eixo é perpendicular aos planos das bases.




Cilindro circular reto

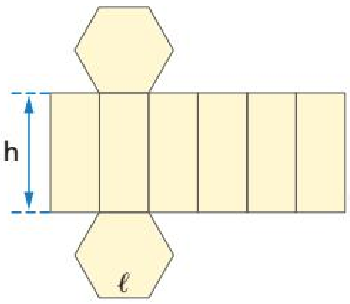



Planificação da superfície do cilindro reto

De maneira análoga ao volume do prisma reto, o volume de um cilindro reto também é dado pelo produto da área da base pela altura *h* do cilindro (distância entre as bases). Como cada base é um círculo de raio *r*, temos: $V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$.

Acompanhe a seguinte situação:

**1** José fez o molde de uma caixa que vai construir conforme figura ao lado.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** Qual é a forma dessa caixa?

A caixa tem a forma de um prisma reto hexagonal.

**b)** Se a medida de todos os lados do polígono da base é $\ell$, o que podemos concluir sobre cada base?
Cada base é delimitada por um hexágono regular de lado medindo $\ell$.

**c)** Qual é o volume dessa caixa quando $\ell = 10$ cm e a altura $h$ é igual a 30 cm?
Para um hexágono regular, temos que a medida $\ell$ do lado é igual à medida $r$ do raio do polígono, a medida $a$ de seu apótema é dada por $a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ e sua área é dada pelo produto de seu semiperímetro pela medida do apótema ($A = p \cdot a$). Assim, temos:

$$V_{caixa} = \text{área da base} \cdot \text{altura} = (p \cdot a) \cdot h = \frac{6 \cdot 10}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{2} \cdot 30$$

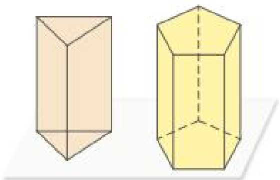
$$V_{caixa} = 4\,500\sqrt{3}$$

O volume da caixa é de $4\,500\sqrt{3}$ cm³.

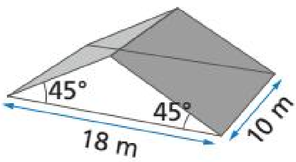
## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Identifique os sólidos ao lado. Em seguida, explique como se obtém o volume de cada um deles.



**2.** A estrutura de um telhado tem a forma da figura ao lado.



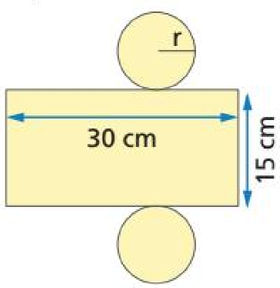

**a)** Essa estrutura tem a forma de que sólido?

**b)** Qual é o volume ocupado por essa estrutura?

**3.** Uma indústria produz organizadores para escritório. Observe o molde de um porta-lápis que o projetista fez.

**a)** Que forma terá esse porta-lápis?

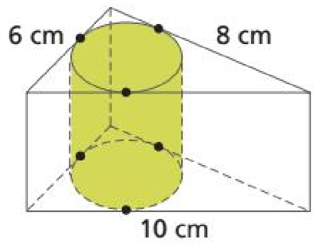
**b)** Determine o volume dessa peça. Use $\pi = 3$.




Agora, junte-se a um amigo e resolva os **desafios** a seguir.

**DESAFIO**

**4.** (Enem) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O raio da perfuração da peça é igual a:

**a)** 1 cm
**b)** 2 cm
**c)** 3 cm
**d)** 4 cm
**e)** 5 cm

**5.** Qual é o volume da peça da questão anterior? Use $\pi = 3{,}14$.

## RETOMANDO O QUE APRENDEU

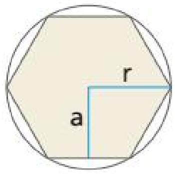
Responda às questões no caderno.

**1.** Descreva os passos de um procedimento para a construção de um:

**a)** triângulo equilátero de 6 cm de lado;

**b)** pentágono regular de 3 cm de lado.

**2.** (Saresp-SP) A figura ao lado representa um hexágono inscrito em uma circunferência cujo raio mede 8 cm. Considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$, o lado e o apótema desse hexágono medem, respectivamente:



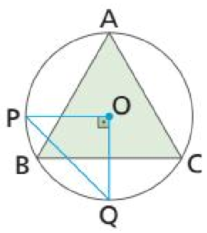

**a)** 8 cm e 6,8 cm.

**b)** 8 cm e 13,6 cm.

**c)** 5,8 cm e 8 cm.

**d)** 4 cm e 6,8 cm.

**3.** Na figura, o triângulo equilátero ABC está inscrito na circunferência de centro *O*.




Sendo *P* e *Q* pontos dessa circunferência, tal que PQ = 4 cm, o perímetro do △ABC é:

**a)** $3\sqrt{6}$ cm

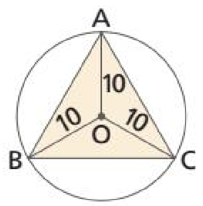
**b)** $6\sqrt{6}$ cm

**c)** 12 cm

**d)** $12\sqrt{2}$ cm

**e)** $12\sqrt{3}$ cm

**4.** (Saresp-SP) Uma circunferência de 10 cm de raio circunscreve um triângulo ABC equilátero. (Use: $\sqrt{3} = 1{,}7$.)




A área desse triângulo é de:

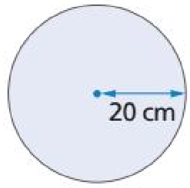
**a)** 255 cm²

**b)** 216,75 cm²

**c)** 105,5 cm²

**d)** 127,5 cm²

**5.** (Saresp-SP) Tenho um pedaço de papel de seda de forma circular cujo raio mede 20 cm. Quero fazer uma pipa quadrada, do maior tamanho possível, com esse pedaço de papel de seda. Fazendo $\sqrt{2} = 1{,}4$, quanto medirá o lado desse quadrado?




**a)** 56 cm

**b)** 35 cm

**c)** 28 cm

**d)** 14 cm

**6.** A divisão do número 0,5 por *x* tem o mesmo resultado que a adição do número 0,5 com *x*. Se *x* é um número real positivo e considerando $\pi = 3{,}14$, qual é a área do círculo cujo raio mede *x* cm?

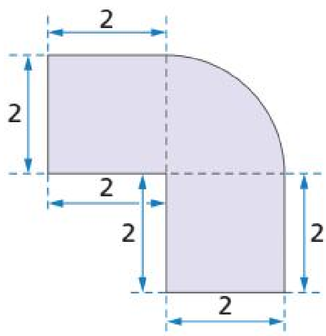
**a)** 0,685 cm²

**b)** 0,785 cm²

**c)** 0,885 cm²

**d)** 0,875 cm²

**7.** Qual é a área, em centímetro quadrado, desta figura? (Use: $\pi = 3{,}14$.)




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** 11

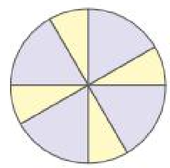
**b)** 11,04

**c)** 11,14

**d)** 11,24

**e)** 12,14

**8.** O desenho representa uma praça circular de 60 m de diâmetro. Os jardins estão representados pelas regiões pintadas de amarelo, que são setores circulares, cujo ângulo central é 30°. Qual é a área ocupada pelos jardins? (Use: $\pi = 3{,}14$.)



**a)** 900 m²

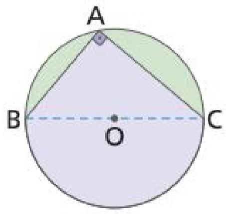
**b)** 920 m²

**c)** 940 m²

**d)** 942 m²

**e)** 950 m²

**9.** Na figura, $AB = 6$ cm e $AC = 8$ cm. Sabendo que $\overline{BC}$ é o diâmetro do círculo, qual é a área da região colorida de roxo? (Use: $\pi = 3{,}14$.)




**a)** 63 cm²
**b)** 63,25 cm²
**c)** 63,50 cm²
**d)** 63,75 cm²
**e)** 64,25 cm²

**10.** Um quadrado ABCD tem um de seus lados sobre o eixo *x* com A (−1, 2) e B (1, 2).

**a)** Represente esse quadrado em um plano cartesiano e determine as coordenadas dos outros dois vértices.

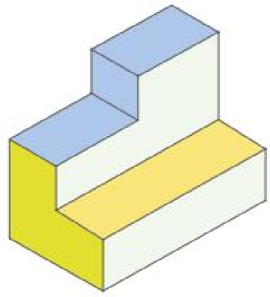
**b)** Localize *M*, ponto médio de $\overline{AB}$ no plano cartesiano e obtenha suas coordenadas.

**c)** Dê as coordenadas dos pontos médios *N*, *O* e *P* dos lados $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.

**d)** Calcule o perímetro e a área do quadrilátero MNOP.

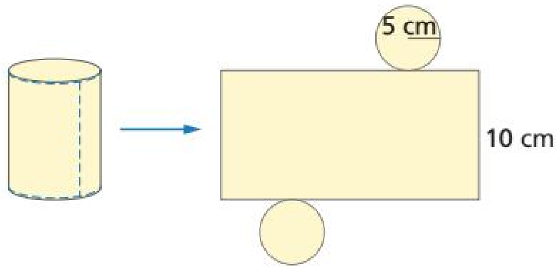
**11.** Observe abaixo a perspectiva de um objeto.

Desenhe as projeções ortogonais que geram as vistas ortogonais dessa peça: vista frontal, vista superior e vista lateral.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**12.** Observe a seguir a representação de um cilindro reto e da planificação de sua superfície. (Use: $\pi = 3{,}1$.)



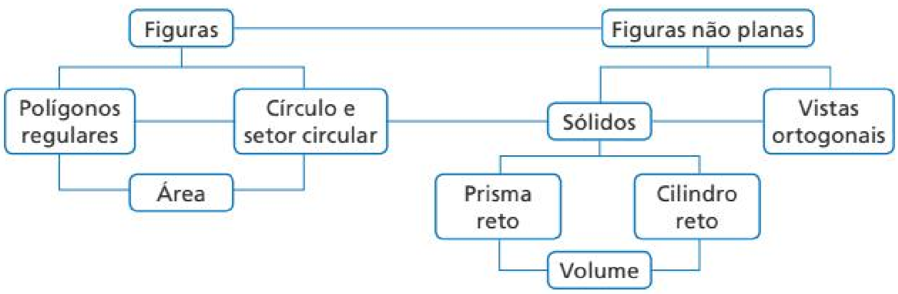

Qual é o volume desse cilindro?

## UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, ampliamos o estudo sobre os polígonos regulares, explorando sua construção, seus elementos e relações métricas. Estudamos também áreas, trabalhando com a área de um polígono regular, do círculo e de um setor circular. Verificamos como obter as coordenadas cartesianas do ponto médio de um segmento de reta, a distância entre dois pontos, as vistas ortogonais de um objeto e o volume de um prisma reto e de um cilindro reto.

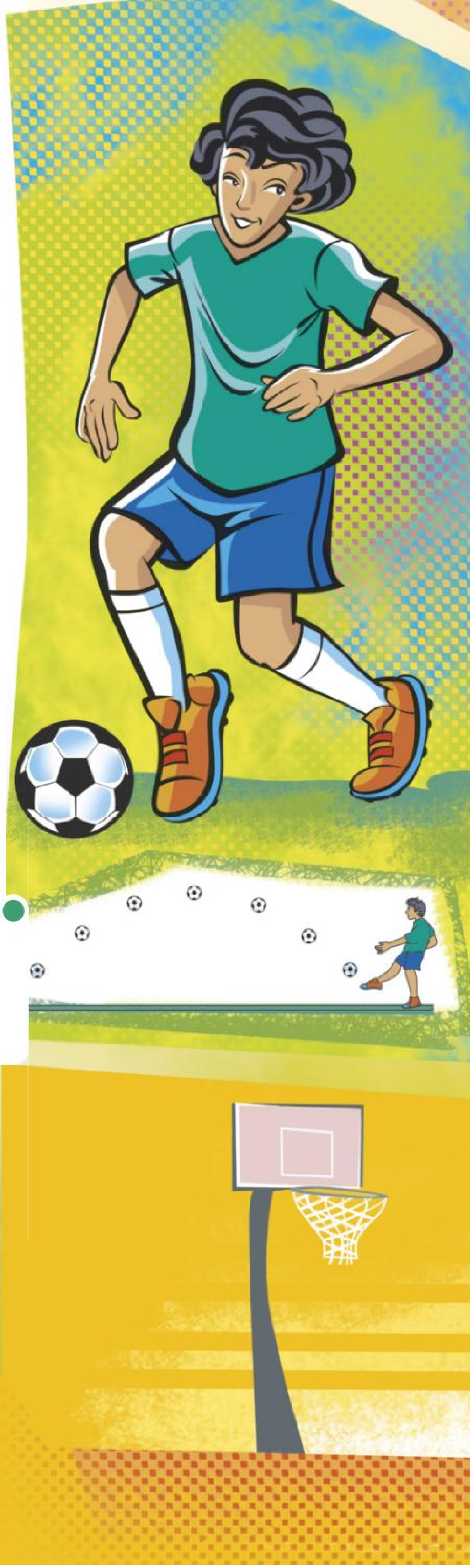
Vamos retomar as aprendizagens desta Unidade e refletir sobre elas:

- **Indique uma aplicação do cálculo da área de um polígono regular e do círculo.**
- **O cálculo da distância entre dois pontos possibilita obter que elementos de um polígono cujas coordenadas do vértice são conhecidas?**
- **Observe o diagrama abaixo e analise as relações indicadas nele. Em seguida, junte-se a um colega e explique essas relações para ele.**




- **Qual é a importância de conhecer as vistas ortogonais de um objeto?**

# 9 FUNÇÃO



A Física utiliza modelos matemáticos para estudar as diversas situações do cotidiano. Um exemplo disso é o movimento em comum que observamos em diversas modalidades de esportes.

A maneira mais simples de interpretar o movimento de um corpo é pelo movimento retilíneo uniforme, que é descrito pela sentença $S = S_0 + vt$, que relaciona a posição final *S* do corpo com o tempo *t* que o corpo leva para ir da posição inicial $S_0$ para a final, com uma velocidade *v* constante.

No entanto, movimentos retirados da prática de *skate*, futebol e basquete envolvem velocidades que não são constantes.

Na Física, esse movimento recebe o nome de **movimento balístico** e descreve o lançamento de projéteis, que é descrito por uma sentença mais elaborada e que também relaciona posição e tempo.

**Agora, responda às questões a seguir no caderno.**

- **Os modelos que descrevem os movimentos são denominados funções e relacionam duas grandezas. Quais são essas grandezas?**
- **O que há em comum entre os três movimentos apresentados nas imagens ao lado? Qual curva esses movimentos lembram?**

ASE/SHUTTERSTOCK.COM

MARCOS GUILHERME

CAPÍTULO 1

# A NOÇÃO DE FUNÇÃO

Com bastante frequência, nos deparamos com situações que envolvem relações entre duas grandezas variáveis. Acompanhe algumas dessas situações:

**1** Uma peteca custa 30 reais. Se representarmos por $x$ a quantidade de petecas iguais a essa que Rui, o professor de Educação Física, quer comprar e por $y$ o preço, em reais, que ele vai pagar, podemos organizar o quadro abaixo.

Peteca.

| Quantidade de petecas (x) | Preço a pagar (y) |
|---|---|
| 1 | $1 \cdot 30 = 30$ |
| 2 | $2 \cdot 30 = 60$ |
| 3 | $3 \cdot 30 = 90$ |
| 4 | $4 \cdot 30 = 120$ |
| ⋮ | ⋮ |
| 10 | $10 \cdot 30 = 300$ |
| 11 | $11 \cdot 30 = 330$ |
| ⋮ | ⋮ |

Observando o quadro, você percebe que o preço $y$ a pagar depende da quantidade $x$ de petecas que forem compradas. Entre as grandezas $y$ e $x$ existe uma relação expressa pela sentença matemática $y = x \cdot 30$ ou $y = 30x$.

Você também pode notar que:

- A quantidade $x$ de petecas é uma grandeza que varia de forma independente.
- O preço $y$ a pagar é uma grandeza que varia de acordo com a grandeza quantidade de petecas.
- A todos os valores de $x$ estão associados valores de $y$.
- Para cada valor de $x$ está associado um único valor de $y$.

Nessas condições, podemos dizer:

O preço $y$ a pagar é dado em função da quantidade $x$ de petecas adquiridas, e a sentença $y = 30x$ é chamada **lei de formação** dessa função.

Neste caso, a variável $x$ é chamada **variável independente**, e a variável $y$ é **dependente da variável *x***. Uma vez estabelecida a relação entre as grandezas **quantidade de petecas** e **preço a pagar**, podemos responder a questões como:

a) Quanto o professor vai pagar por 50 petecas iguais a essa?

$y = 30x \Rightarrow y = 30 \cdot 50 \Rightarrow y = 1\,500$

Logo, o professor vai pagar R$ 1 500,00 por 50 petecas.

b) Se ele tiver R$ 780,00, quantas dessas petecas poderão ser compradas?

$$y = 30x \Rightarrow 780 = 30x \Rightarrow x = \frac{780}{30} = 26$$

Portanto, ele poderá comprar 26 petecas.

**2** Há algum tempo, quando Márcia ligava seu computador à rede internacional de computadores, internet, ela pagava uma mensalidade fixa de R$ 30,00, mais 15 centavos de real (R$ 0,15) por minuto de uso. O valor a ser pago por Márcia ao final do mês dependia, então, do tempo que ela gastava acessando a internet.

Observe o quadro que relaciona o valor a ser pago com o tempo de acesso à rede.

| Tempo de acesso (em min) | Valor a ser pago (em reais) |
|---|---|
| 1 | $30 + 0{,}15 = 30{,}15$ |
| 2 | $30 + 0{,}15 \cdot 2 = 30{,}30$ |
| ⋮ | ⋮ |
| t | $30 + 0{,}15 \cdot t$ |

Podemos, então, estabelecer uma relação entre as grandezas por meio da sentença $V = 30 + 0{,}15 \cdot t$, em que *V* é o valor a ser pago (em reais), e *t* é o tempo de utilização (em minutos). Nessa relação, dizemos que *t* é a variável independente e que *V* é a variável que depende de *t*, ou seja, a variável *V* é dada em função da variável *t*.

Estabelecida a relação entre as grandezas, podemos responder às questões:

a) Quanto gastava Márcia quando, durante um mês, utilizava a internet por 10h20min?

$10\text{h}20\text{min} = 10 \cdot 60 \text{ min} + 20 \text{ min} = 620 \text{ min}$

$V = 30 + 0{,}15 \cdot 620 = 123{,}00$

Márcia gastava R$ 123,00.

b) Quantas horas ela poderia utilizar a internet se quisesse gastar, no máximo, R$ 90,00 no mês?

Para $V = 90$, temos:

$$90 = 30 + 0{,}15 \cdot t \Rightarrow 60 = 0{,}15 \cdot t \Rightarrow t = \frac{60}{0{,}15} = 400 \Rightarrow t = 400 \text{ min} = 6\text{h}40 \text{ min}$$

Nesse caso, ela poderia utilizar a internet por 6h40min.

# Domínio e conjunto imagem de uma função

Quando relacionamos duas variáveis por meio de uma função, devemos estar atentos aos valores que as variáveis podem assumir dentro da situação. Veja os casos a seguir.

- O perímetro *y* de um quadrado, por exemplo, é dado em função da medida *x* de seu lado pela lei de formação $y = 4x$. Nesse caso, *x* tem de ser um número real positivo, pois não existe medida de lado nula ou negativa. Assim, *x* nunca poderá assumir o valor $-2$, por exemplo.

Como já vimos, os valores que *y* assumirá (valor da função) dependem dos valores de *x*. Para cada valor de *x*, temos um único valor correspondente de *y*.

- Na função dada pela lei $y = \frac{1}{x}$ por exemplo, a variável *x* não pode assumir o valor zero, pois não existe divisão por zero. Assim, a variável *x* pode assumir qualquer valor real diferente de zero.

De modo geral, em uma função:

O conjunto de valores que a variável *x* pode assumir chama-se **domínio da função** e é indicado por ***D***. O valor da variável *y* correspondente a um determinado valor de *x* é chamado **imagem** do número *x* dado pela função. O conjunto formado por todos os valores de *y* que correspondem a algum *x* do domínio é chamado **conjunto imagem da função** e é indicado por **Im**.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Os professores de uma academia recebem a quantia de 45 reais por aula, mais uma quantia fixa de 200 reais como abono mensal. Então, a quantia *y* que o professor recebe por mês é dada em função da quantidade x de aulas que ele dá durante esse mês. Qual é a lei de formação da função que relaciona essas duas grandezas?

MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

**2.** Escreva algebricamente a lei de formação de cada função descrita a seguir.

**a)** A cada número real positivo *x* associar um número real *y* que represente o inverso de *x*.

**b)** A cada número real *x* associar um número real *y* que represente o quadrado de *x*, menos 4.

**c)** A cada número real *x* associar um número real *y* que represente a metade de *x*, aumentada de 5.

**3.** A família Soares (pai, mãe e 2 filhos) vai acampar durante 2 semanas (14 noites) em um mesmo *camping*. Veja os preços a seguir.


EDITORIA DE ARTE

Pelas promoções, o local mais barato vai depender da idade das crianças. Reproduza e complete em seu caderno o quadro abaixo, em que *x* representa a idade do filho mais velho e *y*, a idade do outro filho.

| Idade dos filhos | *Camping* do Sol | *Camping* dos Pássaros |
|---|---|---|
| $x < 5$ | | |
| $y < 5$ e $5 \leqslant x < 15$ | | |
| $y < 5$ e $x \geqslant 15$ | | |
| $y \geqslant 5$ e $x < 15$ | | |
| $5 \leqslant y < 15$ e $x \geqslant 15$ | | |
| $y \geqslant 15$ | | |

**4.** Fernanda trabalhou no projeto de uma empresa de arquitetura durante o ano de 2019. O preço total de *x* reais por esse projeto foi pago a Fernanda em parcelas, a cada dois meses, da seguinte maneira:

| Meses | Valor a ser pago (em função de *x*) |
|---|---|
| Janeiro | 0,1x |
| Março | 0,1x |
| Maio | 0,1x |
| Julho | 0,2x |
| Setembro | 0,25x |
| Novembro | 0,25x |

Para não se atrapalhar com as finanças e também para economizar para um curso futuro, Fernanda decidiu gastar, mensalmente, 5% do valor total desse trabalho.

**a)** Quanto Fernanda poupou no total?

**b)** Fernanda quer fazer um curso de pós-graduação que custa R$ 20 000,00. Para que ela pague integralmente esse curso com o dinheiro poupado, qual deve ser o valor mínimo de *x* (em reais)?

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

## Poupança: o que é?

Postado pelo **O Jornal Econômico** em 28 de setembro de 2018.

[...]

A poupança é a parte do rendimento disponível que não afeta a despesa de consumo final. Permite precaver e enfrentar imprevistos tal como o desemprego, um acidente, doença ou despesa inesperada.

Para além de se tornar um fundo de emergência (pelo, menos, 5 a 6 vezes o rendimento mensal da família) para acomodar o impacto financeiro de uma dessas situações imprevistas, a poupança pode ter como objetivo planear a compra de bens ou serviços, criar um complemento de reforma, ou para acautelar os estudos dos filhos ou ainda para dispor de um plano de saúde.

[...]

**A importância da poupança**

A elaboração do orçamento familiar permite o controle das despesas correntes e a tomada de decisões financeiras importantes e a regularidade com que faz e gere o vosso orçamento é a Chave para o Sucesso!

[...]

Todos os meses, ou sempre que possível e com regularidade, as famílias devem retirar uma parte dos seus rendimentos para uma poupança. O ideal seriam 10% do rendimento, no entanto esta avaliação terá que ser feita, caso a caso.

Fonte: **O Jornal Econômico**.
Extraído do *site*: <https://jornaleconomico.sapo.pt/noticias/poupanca-o-que-e-359747>.
Acesso em: 13 nov. 2018.

Como você viu no texto, é muito importante planejar seus gastos e poupar regularmente.

Ao estabelecer metas e prazos, pode-se ter uma ideia de quanto é preciso guardar por mês para realizar um sonho.

**1. Veja o exemplo de Ricardo, com 14 anos, que já está pensando no futuro, e quer economizar R\$ 50,00 por mês. Por meio de uma função, podemos representar o total economizado por ele ao longo dos meses cuja lei é dada por $y = 50x$, em que *y* é o total economizado, e *x*, o número de meses. Usando essa função, responda no caderno:**

**a)** Quanto Ricardo terá economizado em 1 ano?

**b)** Usando a lei da função, calcule quanto dinheiro ele terá se guardar esse valor mensal durante 9 anos.

**c)** Qual é a diferença entre o valor obtido no item b com o valor mostrado no gráfico ao lado, que corresponde a colocar esse dinheiro em um investimento rendendo juro em vez de simplesmente guardá-lo? Essa diferença corresponde a que percentual do total guardado?

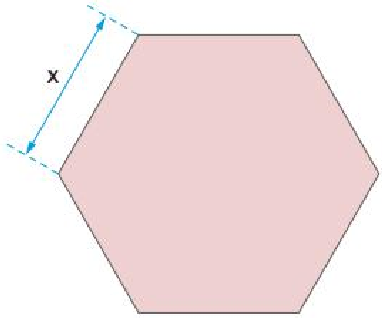

Fonte: dados fictícios.

CAPÍTULO

# 2 A FUNÇÃO AFIM

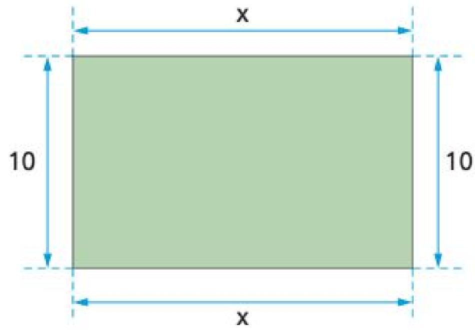
Acompanhe as seguintes situações:

**1** Um hexágono regular, cujo lado mede *x* unidades, tem seu perímetro indicado por *y*. Nesse caso, o perímetro é dado em função da medida do lado, e essa relação é uma função definida pela lei de formação $y = 6x$.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**2** Um retângulo, cujo comprimento mede *x* unidades e a largura mede 10 unidades, tem seu perímetro indicado por *y*. Logo, o perímetro desse retângulo é dado em função de seu comprimento, e a função obtida dessa relação é definida por $y = 2x + 20$.




Podemos observar que, nas duas sentenças matemáticas, o 2º membro é um polinômio do 1º grau na variável *x*.

$$y = \underbrace{6x}_{\text{polinômio do 1º grau na variável } x} \qquad y = \underbrace{2x + 20}_{\text{polinômio do 1º grau na variável } x}$$

Uma função é chamada **função afim** quando é definida pela sentença matemática $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Pela definição, são exemplos de funções afins:

- $y = 3x - 1$
- $y = -6x$
- $y = \frac{1}{2}x + 5$
- $y = \frac{1}{3}x - \sqrt{2}x$
- $y = 7 - 5x$
- $y = 12x$

Observe, a seguir, um exemplo de questão que envolve função afim.

**1** Dada a função definida por $y = -7x + 5$, vamos determinar a imagem do número real $-3$ por essa função.

Para determinar essa imagem, substituímos *x* por $-3$ na lei de formação dessa função:

$y = -7x + 5 \Rightarrow y = -7 \cdot (-3) + 5$

$y = 21 + 5 \Rightarrow y = 26$

Logo, 26 é a imagem do número $-3$ pela função dada.

# Função linear

Em uma função afim dada por $y = ax + b$ (com $a \neq 0$), os valores *a* e *b* são os coeficientes da função. Quando $b = 0$, a lei da função afim é dada por $\mathbf{y = ax}$ (com $a \neq 0$) e ela é denominada **função linear**.

Como exemplo, consideremos a função definida por $y = 3x$.

Nesse caso, os coeficientes são $a = 3$ e $b = 0$, ou seja, a função afim é uma função linear ($b = 0$).

Veja o quadro a seguir com alguns valores de *x* e *y*.

| $y = 3x$ | | |
|---|---|---|
| **x** | **y** | $\frac{y}{x}$ |
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 6 | 3 |
| 3 | 9 | 3 |
| 4 | 12 | 3 |

Observando o quadro, podemos verificar que as variáveis *x* e *y* determinam grandezas que são diretamente proporcionais, já que a razão entre valores correspondentes delas é uma constante $\left(\frac{1}{2} = 3\right)$. Essa constante de proporcionalidade é o próprio coeficiente *a*.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** **Uma função afim é definida por $y = 5x + 3$. Nessas condições, determine a imagem do número $-2$ por essa função.**

**2.** **Dada a função afim definida por $y = -8x + 4$, determine o número real *x* cuja imagem por essa função é zero.**

**3.** **O perímetro *y* de um quadrado é dado em função da medida *x* do lado segundo a lei $y = 4x$. Nessas condições:**

**a)** Organize um quadro com os valores dessa função para as seguintes medidas *x* do lado: 5 cm; 7,2 cm; 11 cm; 20,5 cm e $10\sqrt{3}$ cm.

| x | $y = 4x$ |
|---|---|
| 5 cm | |
| 7,2 cm | |
| 11 cm | |
| 20,5 cm | |
| $10\sqrt{3}$ cm | |

**b)** Observando o quadro que você organizou, qual é a imagem do número real $10\sqrt{3}$ por essa função?

**c)** Observando o quadro que você organizou, qual é o número real *x* cuja imagem por essa função é 44?

**d)** Essa função é linear? O que se pode dizer sobre as grandezas perímetro e medida do lado de um quadrado relacionadas por essa função?

# Gráfico da função afim

Podemos representar graficamente uma função afim utilizando, para isso, um sistema de coordenadas cartesianas. Essa representação deve nos dar todas as informações sobre como se comporta essa função e é um recurso muito utilizado por ser de fácil visualização.

Já sabemos que, em uma função, cada valor de *x* corresponde a um único valor de *y*; marcamos, então, no plano cartesiano, os pontos de coordenadas (x, y). Dessa maneira, obtemos um conjunto de pontos chamado **gráfico da função**.

Acompanhe os exemplos a seguir para compreender melhor o que significa o gráfico de uma função.

**1** Vamos traçar, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = 2x$, considerando *x* um número real qualquer.

Inicialmente, vamos atribuir valores arbitrários para *x*, determinando os valores correspondentes para *y*, e organizá-los.

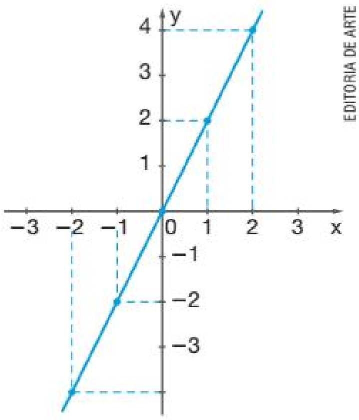
- $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot (0) = 0$
- $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot (1) = 2$
- $x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) = -2$
- $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot (2) = 4$
- $x = -2 \Rightarrow y = 2 \cdot (-2) = -4$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 2 | (1, 2) |
| −1 | −2 | (−1, −2) |
| 2 | 4 | (2, 4) |
| −2 | −4 | (−2, −4) |

A cada par ordenado (x, y) obtido, associamos um ponto do plano cartesiano.

O gráfico da função é o conjunto de todos os pontos (x, y), com x real e $y = 2x$.

Observe que nesse caso o gráfico da função $y = 2x$ é uma reta.




EDITORIA DE ARTE

Veja no material audiovisual o vídeo sobre Geometria analítica e o método científico.

NÓS

### Limite de internet

Segundo o levantamento realizado pelo Cetic.br (Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação), em 2015, 68% da população brasileira acessava a internet por meio de banda larga (conexão de alta velocidade), e esse número só tende a crescer.

Com a difusão desse tipo de conexão em todo o mundo, surgiram novos serviços que requerem alta velocidade de transmissão e alto consumo de dados, como o *streaming*. Isso vem gerando no Brasil um debate sobre a capacidade que as empresas de telecomunicação têm de fornecer um serviço de qualidade e ilimitado aos usuários.

Informações obtidas em: <https://goo.gl/4S5T47>. Acesso em: 5 abr. 2017.

- Pesquise a qualidade de conexão à internet no Brasil em comparação com outros países do mundo.
- Faça uma pesquisa sobre o sistema de franquias proposto pelas empresas de telecomunicação e debata com seus colegas sobre os possíveis efeitos desse tipo de cobrança.

**2** Vamos representar, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = 2x - 3$, considerando *x* um número real qualquer. Inicialmente, vamos organizar os valores e obter os pares ordenados:

- $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot (0) - 3 = -3$
- $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot (1) - 3 = -1$
- $x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$
- $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot (2) - 3 = 1$

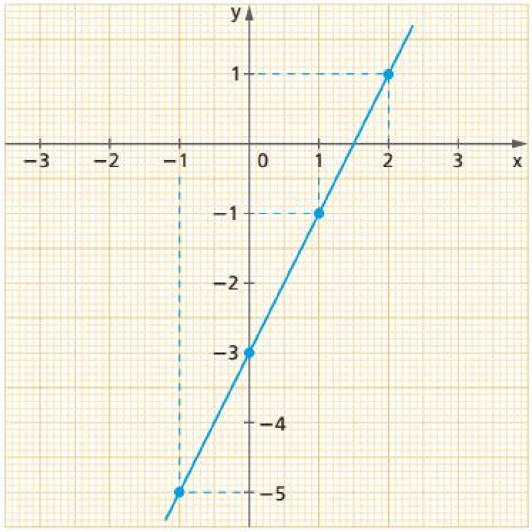
| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | −3 | (0, −3) |
| 1 | −1 | (1, −1) |
| −1 | −5 | (−1, −5) |
| 2 | 1 | (2, 1) |

No plano cartesiano ao lado, a cada par (x, y) associamos um ponto. O conjunto de todos os pontos (x, y), com *x* real e $y = 2x - 3$, é o gráfico da função que, nesse caso, também é uma reta.

De modo geral, dizemos que:

> O gráfico de uma função afim, no plano cartesiano, com $x \in \mathbb{R}$, é sempre uma **reta**.

Como o gráfico de uma função afim é uma reta, e uma reta fica determinada por dois pontos, basta definir dois pares (x, y).




EDITORIA DE ARTE

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Trace no plano cartesiano o gráfico de cada função afim a seguir, sendo *x* um número real qualquer.

**a)** $y = x + 1$

**b)** $y = x$

**c)** $y = -x + 4$

**d)** $y = 1 - 2x$

**e)** $y = -4x$

**f)** $y = \frac{1}{2}x + 2$

**2.** Trace, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y = 3x - 2$ e $y = 2x - 1$, sendo *x* um número real qualquer. Observando o gráfico, quais as coordenadas do ponto de encontro das duas retas?

**3.** Em um mesmo plano cartesiano, trace as retas que representam os gráficos das funções $y = x + 3$ e $y = x - 2$, sendo *x* um número real qualquer. Qual a relação entre essas duas retas?

**4.** Um carro se movimenta em velocidade constante, segundo a sentença matemática $y = 2x + 1$, em que *y* representa a posição, em metros, do carro no instante *x*, em segundos. Esboce, no plano cartesiano, o gráfico da posição do carro em função do tempo. Lembre-se de que nesse caso a variável *x* assume apenas valores reais não negativos.

**5.** Usando o plano cartesiano, determine as coordenadas do ponto de encontro das retas que representam os gráficos das funções dadas por $y = 6 - x$ e $y = x - 2$.

# Zero da função afim

O valor do número real *x*, para o qual se tem $y = 0$ (ou $ax + b = 0$), denomina-se **zero da função** afim.

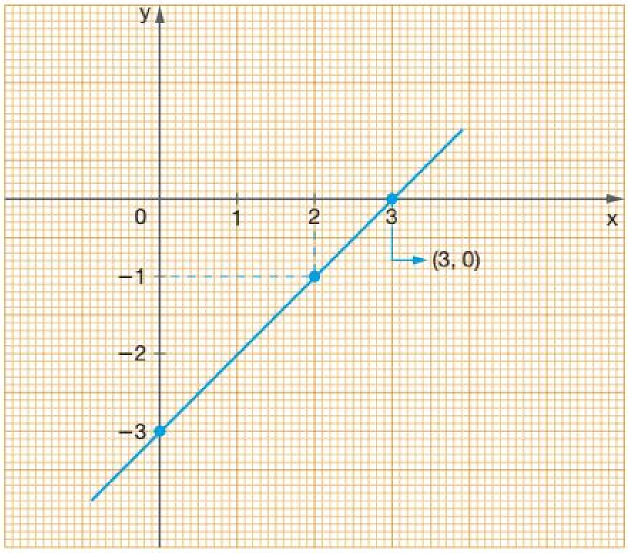
Vamos determinar, por exemplo, o zero da função definida por $y = x - 3$.

Algebricamente, devemos fazer $x - 3 = 0$ e resolver a equação obtida:

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Geometricamente, representamos o gráfico da função:

| x | y |
|---|---|
| 0 | −3 |
| 2 | −1 |
| 3 | 0 |




EDITORIA DE ARTE

Pelo gráfico, vemos que $y = 0$ no ponto associado ao par ordenado (3, 0).

Logo, o zero da função é dado pelo valor $x = 3$.

Você pode notar que, geometricamente, o zero da função está associado ao ponto em que a reta corta o eixo *x*.

De modo geral, dada a função $y = ax + b$, quando $y = 0$, temos:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Logo, o zero da função afim será dado por $x = -\frac{b}{a}$

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Determine, algebricamente, o zero de cada uma das seguintes funções:

**a)** $y = x - 6$

**b)** $y = -x - 4$

**c)** $y = -x + 10$

**d)** $y = 2x - 3$

**e)** $y = 1 - 5x$

**f)** $y = \frac{1}{2}x + 3$

**2.** Fazendo o gráfico, determine o zero de cada uma das funções a seguir.

**a)** $y = x + 1$

**b)** $y = -x + 3$

**c)** $y = 2 - x$

## POR TODA PARTE

### A renda de bilro

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Confecção de renda de bilro, Florianópolis, SC.

O artesanato brasileiro surgiu com os índios, na pintura com pigmentos naturais, na cestaria, na cerâmica, na arte plumária, quando confeccionavam peças de vestuário e ornamentos feitos com plumas de aves.

Um dos mais ricos do mundo, o artesanato brasileiro revela não só usos, costumes, tradições e características de cada região do Brasil, mas também mostra influências sofridas por outros povos, como a confecção da renda de bilro, que teve origem na Bélgica, espalhou-se pela Europa e foi trazida ao Brasil pelos portugueses açorianos, quando se instalaram no litoral de Santa Catarina, principalmente na região de Florianópolis.

As artesãs e os artesãos são bastante criativos e habilidosos ao utilizarem materiais diversificados para produzir peças artísticas, quando o artesanato se confunde com a arte, ou utilitárias, muitas vezes visando ao sustento de sua família.

JUVENAL PEREIRA/PULSAR IMAGENS

Tapete artesanal de sisal, feito em Cachoeira do Brumado, MG.

### A tapeçaria artesanal

Dos motivos geométricos aos florais, os tapetes artesanais exibem uma variedade imensa de cores, motivos, pontos, artigos e tamanhos, de acordo com as funções a que estão destinados.

Responda às questões no caderno.

**1.** Em maio de 2014, uma empresa de Alagoas publicou na internet a oferta ao lado. Naquela data, um comerciante de Manaus encomendou várias peças do anúncio, que foram enviadas por correio, que cobrou R$ 50,00 pelo envio da encomenda. Chamando de $x$ a quantidade de toalhas encomendadas e de $y$ a despesa que esse comerciante teve ao adquirir essa encomenda, determine:

**a)** a lei de formação da função que descreve a dependência da despesa total com o número de toalhas encomendadas.

**b)** o número de toalhas encomendadas, sabendo que o comerciante de Manaus gastou R$ 3350,00 nessa transação.

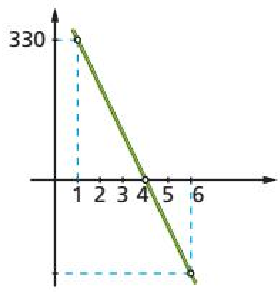

ROGERIO REIS/TYBA

Toalha bordada na Ilha do Ferro, AL.

**2.** A venda dos tapetes produzidos por um artesão no primeiro semestre deste ano teve o desempenho representado no gráfico ao lado. Se no final do 1º mês o artesão teve um lucro de 330 reais, responda de acordo com o gráfico:

**a)** Em que período esse artesão não teve lucro nem prejuízo?

**b)** A sentença matemática que relaciona a variação do lucro/prejuízo com o número de meses decorridos é dada por $y = -110x + 440$. Ao final do 6º mês do semestre, o artesão teve lucro ou prejuízo? De quanto?




EDITORIA DE ARTE

## Interpretando informações

O álcool é a substância psicoativa mais precocemente consumida pelos adolescentes. A idade de início do consumo tem sido cada vez menor, o que aumenta o risco de dependência e problemas no desenvolvimento cognitivo. Aumentam também as chances de envolvimento em acidentes e situações relacionadas à violência. Estudos mostram que o álcool na adolescência está associado com mortes violentas, queda no desempenho escolar, dificuldades de aprendizagem e prejuízo no desenvolvimento.

Os danos causados pelo uso de álcool ao adolescente são diferentes daqueles causados aos adultos, seja por questões existenciais dessa etapa da vida, seja por questões relacionadas ao amadurecimento do cérebro.

A ingestão de uma lata de cerveja, de 350 mL, provoca uma concentração de aproximadamente 0,3 grama/litro de álcool no sangue.

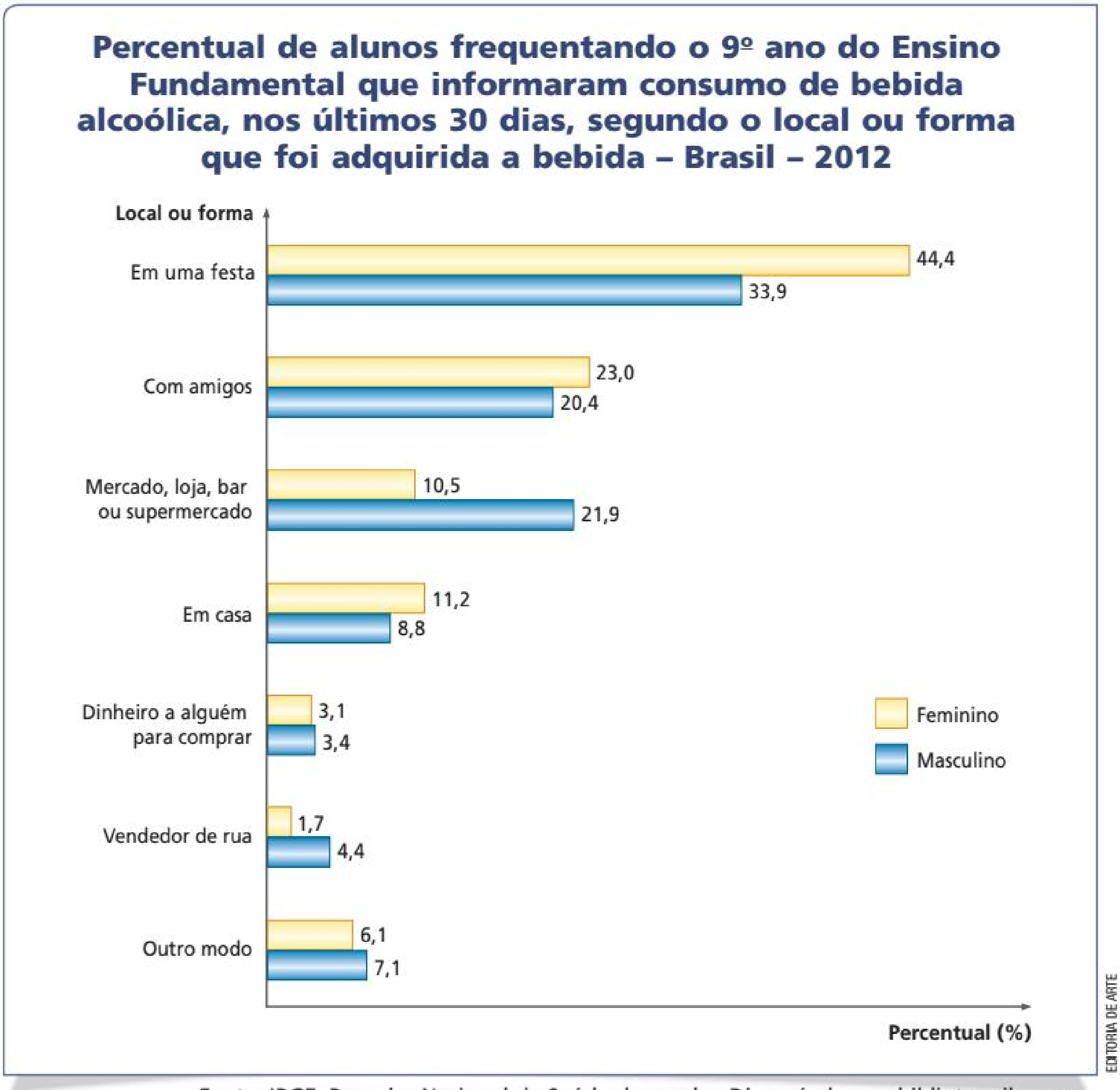
A tabela abaixo mostra os efeitos, sobre o corpo humano, provocados por bebidas alcoólicas em função dos níveis de concentração de álcool no sangue.

**Os efeitos do álcool**

| Concentração de álcool no sangue (g/L) | Efeitos |
|---|---|
| 0,1 a 0,5 | Pouco efeito na maioria das pessoas. |
| 0,4 a 1,2 | Inibição e julgamento diminuídos; perda do controle fino; tempo de reação aumentado. |
| 0,9 a 2,0 | Desorientação; perda do julgamento crítico; perda da memória; tempo de reação aumentado. |
| 1,5 a 3,0 | Desorientação; equilíbrio emocional danificado; fala prejudicada; sensação perturbada. |
| 2,5 a 4,0 | Paralisia e incontinência. |
| 3,0 a 5,0 | Reflexos diminuídos; respiração diminuída e morte possível. |

Informações obtidas em: SBP DA. Uso e abuso de álcool na adolescência. **Adolescência & Saúde**. Disponível em: <http://www.adolescenciaesaude.com/detalhe_artigo.asp?id=93>. Acesso em: 7 nov. 2018.

O relatório da Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar de 2012 constatou que o consumo de bebida alcoólica entre os alunos que frequentam a escola (avaliado pelo consumo no mês que antecedeu a pesquisa) foi 26,1%. Dentre os que consumiram bebida alcoólica, o local de sua obtenção por alunos frequentando o 9º ano do Ensino Fundamental está representado no gráfico a seguir:




Fonte: IBGE. Pesquisa Nacional de Saúde do escolar. Disponível em: <biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv64436.pdf>. Acesso em: 20 maio 2015.

De acordo com as informações do texto, da tabela e do gráfico, responda no caderno:

**1.** Quais são os efeitos possíveis sobre uma pessoa que tomou 5 latas de cerveja seguidamente?

**2.** Para que uma pessoa tenha em seu sangue uma concentração de álcool maior que 3,5 g/L, quantas latas de cerveja devem ser ingeridas seguidamente?

**3.** Dos alunos que frequentam o 9º ano do Ensino Fundamental pesquisados, qual foi o local mais frequente em que adquiriram bebidas alcoólicas?

**4.** As alunas pesquisadas tiveram um consumo maior com amigos ou em mercado, loja, bar ou supermercado? Com os pesquisados do sexo masculino, o resultado foi o mesmo?

**5.** Construa um gráfico de setores com o percentual de alunos do sexo feminino, segundo o local ou forma que foi adquirida a bebida, de acordo com as informações do gráfico acima.

CAPÍTULO 3

# A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Você sabe qual é a soma dos 7 primeiros números inteiros positivos? Para calcular é rápido:

$$S_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, \text{ ou seja, } S_7 = 28.$$

Os números dados por adições como essas podem, a partir de uma disposição conveniente de pontos, representar um triângulo. Por isso, esses números são conhecidos como **números triangulares**.

| x | Formação triangular | $S_x$ |
|---|---|---|
| 1 | • | 1 |
| 2 | • • | 3 |
| 3 | • • • | 6 |
| 4 | • • • • | 10 |
| 5 | • • • • • | 15 |
| 6 | • • • • • • | 21 |
| 7 | • • • • • • • | 28 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Observe que a cada valor de *x* corresponde um único valor de $S_x$, que é a soma dos *x* primeiros números inteiros positivos.

E para obter a soma dos 100 primeiros números inteiros positivos, você conhece um jeito mais rápido? Conta-se que um professor de Gauss, um dos grandes matemáticos que a humanidade conheceu, achava que não. Tanto achava, que teria pedido aos alunos o cálculo de $S_{100}$, num dia em que eles estavam bastante "agitados". Imaginou que esse cálculo os manteria quietos por um bom tempo. Mas eis que, em poucos minutos, o menino Gauss levara ao mestre a resposta correta: cinco mil e cinquenta!

Veja como Gauss raciocinou:

$$\begin{array}{rl}
S_{100} = & 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 \longrightarrow \text{100 parcelas} \\
+\ S_{100} = & 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \longrightarrow \text{100 parcelas} \\
\hline
2 \cdot S_{100} = & 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101 \longrightarrow \text{100 parcelas}
\end{array}$$

$$2 \cdot S_{100} = 100 \cdot 101$$

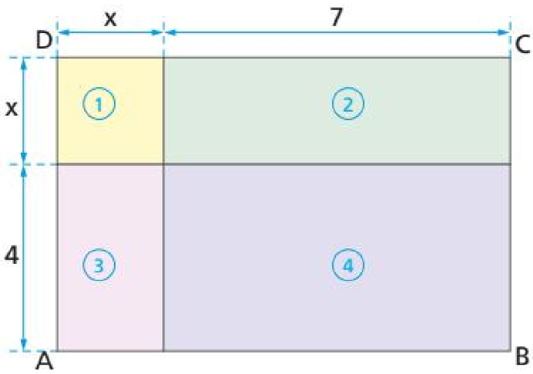
$$S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

$$S_{100} = \frac{100 \cdot (100 + 1)}{2} \longrightarrow S_{100} = 5\,050$$

O raciocínio de Gauss, aplicado à soma dos $x$ primeiros números inteiros positivos, nos faz associar a cada número $x$ um único número $y$ dado por:

$$y = \frac{x(x+1)}{2} \quad \text{ou} \quad y = \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}}_{\text{polinômio do 2º grau na variável } x}$$

Vamos analisar agora outra situação em que encontramos um polinômio do 2º grau na variável $x$. Se observarmos a figura abaixo, veremos que a área $y$ do retângulo ABCD é dada em função da medida $x$ indicada na figura.




Área do retângulo ABCD = área de 1 + área de 2 + área de 3 + área de 4

$$y = x \cdot x + 7 \cdot x + 4 \cdot x + 7 \cdot 4$$

$$y = x^2 + 7x + 4x + 28$$

$$y = \underbrace{x^2 + 11x + 28}_{\text{polinômio do 2º grau na variável } x}$$

Observe que nas duas situações apresentadas acima o membro que define a função é um **polinômio do 2º grau na variável *x***.

De modo geral:

> **Função quadrática** é toda função definida pela sentença matemática $y = ax^2 + bx + c$, com $a$, $b$ e $c$ números reais e $a \neq 0$.

Assim, são exemplos de funções quadráticas:

- $y = x^2 + 2x - 8$
- $y = -x^2 + 9x - 18$
- $y = x^2 - 9$
- $y = 4x^2 - 4x + 1$
- $y = -2x^2 + \sqrt{6}$
- $y = -3x^2 - 2x + 1$

Considerando as definições dadas e os conhecimentos que você já tem, acompanhe o exemplo a seguir.

**1** Dado o número real 7, vamos calcular a imagem desse número pela função que é dada por $y = 3x^2 - 4x + 1$.

Nesse caso, temos $x = 7$.

Fazemos, então:

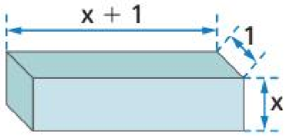
$y = 3 \cdot (7)^2 - 4 \cdot (7) + 1 \Rightarrow y = 147 - 28 + 1 \Rightarrow y = 120$

Logo, a imagem do número real 7, pela função dada, é 120.

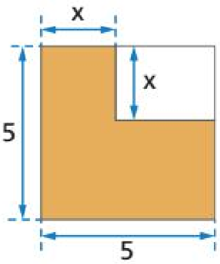
# ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** O volume *y* do paralelepípedo é dado em função da medida *x* indicada na figura. Qual é a sentença matemática que define essa função?




**2.** No quadrado, a área *y* da região colorida de laranja é dada em função da medida *x*. Escreva a lei que define a função dada por essa relação.




**3.** Dada a função $y = x^2 - 15x + 26$, determine a imagem do número real 10 por essa função.

**4.** Dada a função $y = 6x^2 - x - 3$, qual é a imagem do número real $\frac{1}{2}$ por essa função?

**5.** Usando a sentença matemática $y = \frac{x(x+1)}{2}$ que foi descrita no início deste capítulo, calcule:

**a)** a soma *y* dos 1 000 primeiros números inteiros positivos.

**b)** o número inteiro positivo para que a soma *y* seja igual a 66.

**6.** A soma *y* dos *x* primeiros números ímpares positivos é uma função definida pela lei $y = x^2$.

**a)** Calcule a soma dos 100 primeiros números ímpares positivos.

**b)** Calcule a quantidade dos primeiros números ímpares positivos cuja soma é 256.

**c)** Qual é a maior parcela (número ímpar) da adição referente ao item *b*?

**7.** Dadas as funções $f = 0{,}7t$ e $g = t - 0{,}15t^2$, responda:

**a)** Considerando $t = 1$, qual será o valor de *f*? E o valor de *g*?

**b)** Existe algum valor positivo de *t* no qual as funções assumem o mesmo valor? Se sim, qual seria esse valor?

**c)** Para $t = 4$ qual função assumiu maior valor?

## DESAFIO

**8.** Observe a sequência de figuras e faça o que se pede, no caderno:

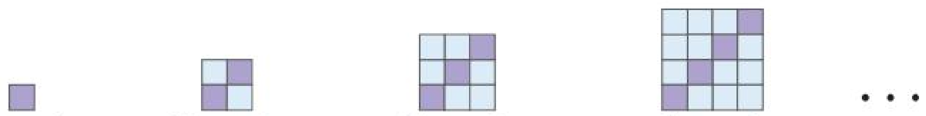


Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

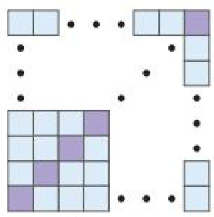


Figura *n*.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

**a)** Copie e complete o quadro abaixo para saber como podemos calcular a quantidade de quadradinhos de qualquer uma das figuras dessa sequência.

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Total de quadradinhos | | | | | | | | |
| Quadradinhos roxos | | | | | | | | |
| Quadradinhos azuis | | | | | | | | |

**b)** A figura *n* tem:

- quantos quadradinhos ao todo?
- quantos quadradinhos azuis?
- quantos quadradinhos roxos?

**c)** Escreva a lei de formação que fornece a quantidade *y* de quadradinhos azuis em função do número *n* da figura.

# Gráfico da função quadrática

No capítulo anterior, vimos que o gráfico de uma função afim, dada por $y = ax + b$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma reta.

Agora, conheceremos a curva, que representa o gráfico de uma função quadrática. Veja os exemplos:

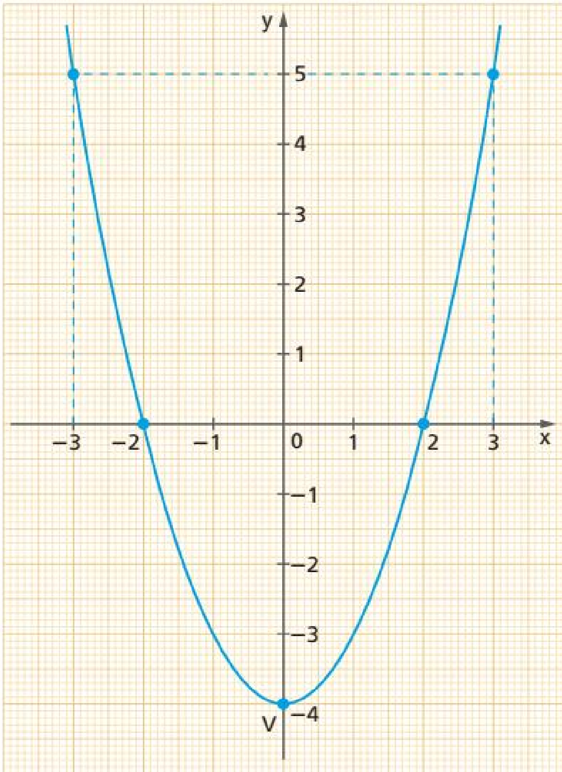
**1** Construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = x^2 - 4$, sendo *x* qualquer número real.

Inicialmente, vamos atribuir alguns valores reais para *x*, como os valores −3, −2, 0, 2, 3. Determinando os pares (x, y), temos:

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| −3 | 5 | (−3, 5) |
| −2 | 0 | (−2, 0) |
| 0 | −4 | (0, −4) |
| 2 | 0 | (2, 0) |
| 3 | 5 | (3, 5) |

O conjunto de todos os pontos (x, y), com *x* real e $y = x^2 - 4$, é o gráfico da função. Esse gráfico é representado por uma curva chamada **parábola**. O ponto *V*, que você observa na figura, chama-se **vértice da parábola**.

Agora, precisamos localizar esses pontos no plano cartesiano.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

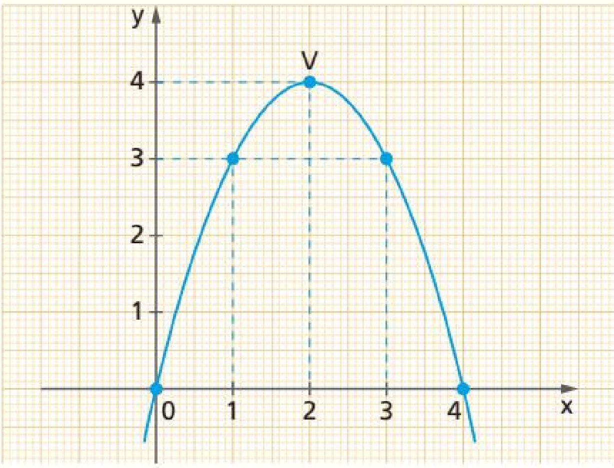
**2** Construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = -x^2 + 4x$, sendo x um número real qualquer.

Inicialmente, vamos determinar alguns pontos (x, y):

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 3 | (1, 3) |
| 2 | 4 | (2, 4) |
| 3 | 3 | (3, 3) |
| 4 | 0 | (4, 0) |

O conjunto de todos os pontos (x, y) com *x* real e $y = -x^2 + 4x$, que é o gráfico da função, nos dá a parábola ao lado.

Localizando esses pontos no plano cartesiano, temos:



Nos exemplos dados, cada parábola possui um ponto *V* (um vértice), cujas coordenadas passaremos a indicar por $(x_v, y_v)$.

É possível demonstrar que o vértice de uma parábola dada pela função $y = ax^2 + bx + c$ pode ser obtido fazendo:

- $x_v = \dfrac{-b}{2a}$
- $y_v = ax_v^2 + bx_v + c$

No exemplo **1** da página anterior ($y = x^2 - 4$), vimos que $V(0, -4)$.

Pela relação, usando $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-(0)}{2 \cdot (1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y_v = x_v^2 - 4 = (0)^2 - 4 = -4$$

Logo, $V(0, -4)$.

No exemplo **2**, ($y = -x^2 + 4x$), vimos que $V(2, 4)$.

Pela relação, usando $a = -1$, $b = 4$ e $c = 0$, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-(4)}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y_v = -x_v^2 + 4x_v = -2^2 + 4 \cdot (2) = -4 + 8 = 4$$

Logo, $V(2, 4)$.

O vértice tem um papel importante na parábola, conforme veremos mais adiante.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1. Determine as coordenadas (x, y) do vértice da parábola que representa cada uma das seguintes funções:**

**a)** $y = x^2 + 6x + 8$

**b)** $y = x^2 - 2x - 8$

**c)** $y = -x^2 + 8x - 15$

**d)** $y = -4x^2 + 6x$

**e)** $y = x^2 + 6x + 11$

**f)** $y = -x^2 + 36$

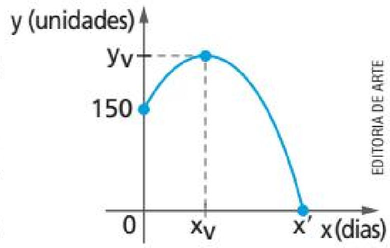
**g)** $y = -x^2 + 7x - 10$

**h)** $y = x^2 - 10x + 24$

**i)** $y = 2x^2 - 4x - 1$

**j)** $y = -4x^2 - 2x$

**2.** (UMC-SP) **Uma loja fez campanha publicitária para vender seus produtos importados.**




**Suponha que *x* dias após o término da campanha as vendas diárias tivessem sido calculadas segundo a função $y = -2x^2 + 20x + 150$, conforme o gráfico.**

**a)** Depois de quantos dias ($x_v$), após encerrada a campanha, a venda atingiu o valor máximo?

**b)** Depois de quantos dias as vendas se reduziram a zero ($y = 0$)?

# Zeros da função quadrática

Dada a função definida por $y = ax^2 + bx + c$, os valores reais de *x* para os quais se tem $y = 0$ (ou $ax^2 + bx + c = 0$) são denominados **zeros (ou raízes) da função quadrática**.

Algebricamente, os zeros (ou raízes) da função quadrática são obtidos quando resolvemos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. A quantidade de zeros (ou raízes) da função depende do valor do discriminante ($\Delta$) da equação, assim:

- Quando $\Delta > 0$, a função tem dois zeros (ou raízes) reais diferentes.
- Quando $\Delta = 0$, a função tem dois zeros (ou raízes) reais iguais.
- Quando $\Delta < 0$, a função não tem zeros (ou raízes) reais.

Acompanhe os exemplos a seguir.

**1** Determinar os zeros (ou raízes) da função $\mathbf{y = x^2 + 2x - 3}$.

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (1)} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\[2ex] x'' = \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Como $\Delta = 16 > 0$, a função tem dois zeros (ou raízes) reais, que são os números 1 e $-3$.

**2** Determinar os zeros (ou raízes) da função $\mathbf{y = -x^2 + 4x - 5}$.

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

$a = -1 \qquad b = 4 \qquad c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4$

Como $\Delta = -4 < 0$, a função não tem zeros (ou raízes) reais.

**3** Determinar os zeros (ou raízes) da função $\mathbf{y = x^2 - 4x + 4}$.

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 4$

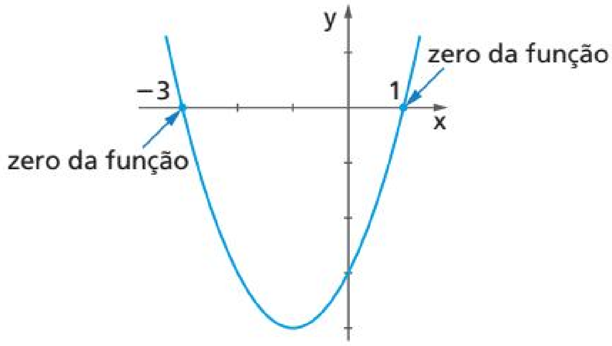
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4) = 16 - 16 = 0$

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot (1)} = \frac{4}{2} = 2$$

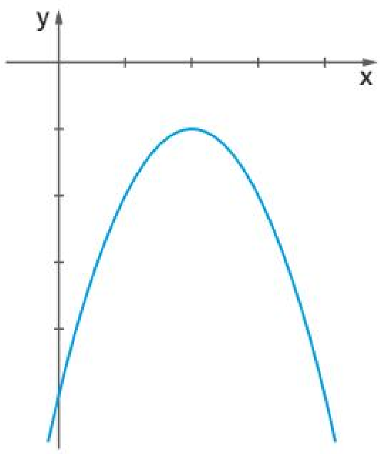
Como $\Delta = 0$, a função tem dois zeros (ou raízes) reais iguais, que é o número 2.

Geometricamente, os zeros (ou raízes) da função correspondem aos valores de *x* nos pontos de intersecção da parábola com o eixo *x*, pois nesses pontos tem-se $y = 0$.

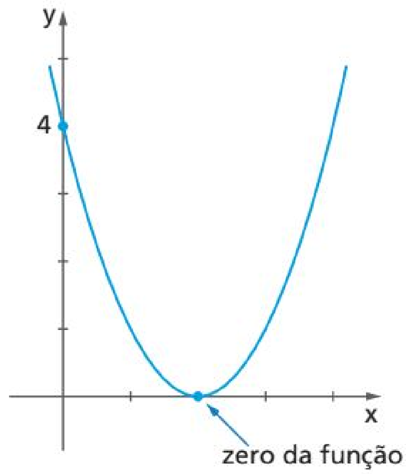
- No gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$, com $x \in \mathbb{R}$, a parábola intercepta o eixo $x$ em dois pontos.




- No gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$, a parábola não intercepta o eixo $x$. Nesse caso, a função não tem zeros reais.




- No gráfico da função $y = x^2 - 4x + 4$, a parábola tangencia o eixo $x$, isto é, tem um único ponto em comum com esse eixo.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Essas condições têm relação com o discriminante $\Delta$:

- Quando $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo $x$ em dois pontos distintos.
- Quando $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo $x$.
- Quando $\Delta = 0$, a parábola e o eixo $x$ têm apenas um ponto em comum, ou seja, a parábola tangencia o eixo $x$.

## ATIVIDADES

**Responda às questões no caderno.**

**1.** Verifique se a parábola que representa o gráfico de cada uma das seguintes funções intercepta ou não o eixo $x$:

**a)** $y = x^2 - 2x - 24$ **c)** $y = -x^2 + 9x - 14$
**b)** $y = x^2 - 6x + 9$ **d)** $y = x^2 - 7x + 13$

**2.** Determine, algebricamente, os zeros de cada uma das seguintes funções quadráticas:

**a)** $y = x^2 - 25$ **d)** $y = 9x^2 - 1$
**b)** $y = -x^2 + 6x$ **e)** $y = -4x^2 + 4x - 1$
**c)** $y = -x^2 + x + 6$ **f)** $y = 6x^2 + 6x$

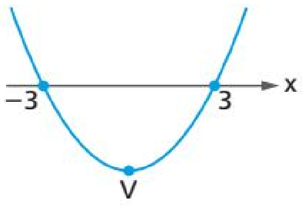
**3.** Sem fazer o gráfico, determine as coordenadas $(x, y)$ dos pontos em que a parábola que representa o gráfico de cada uma das funções a seguir corta o eixo $x$.

**a)** $y = x^2 - 16$ **c)** $y = 3x^2 - 21x$
**b)** $y = -x^2 + 12x - 36$

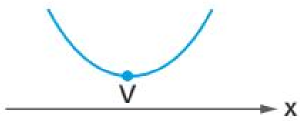
# Concavidade da parábola

Considere as seguintes funções quadráticas e os esboços dos gráficos de cada uma delas:

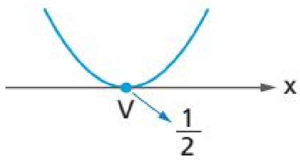
- $y = x^2 - 9$




- $y = x^2 - 2x + 5$

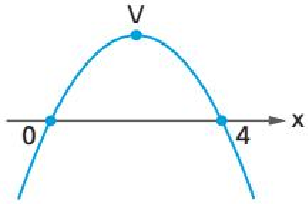



- $y = 4x^2 - 4x + 1$

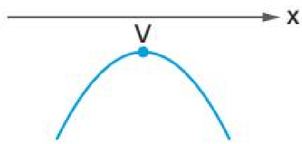



Observe nessas funções que $a > 0$ e que a parábola tem a concavidade voltada para cima.

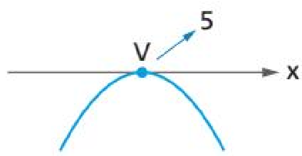
- $y = -x^2 + 4x$




- $y = -x^2 + 4x - 5$




- $y = -x^2 + 10x - 25$



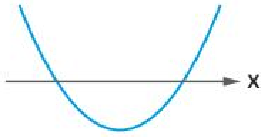
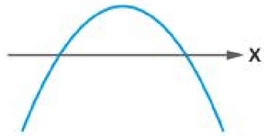
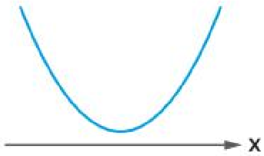
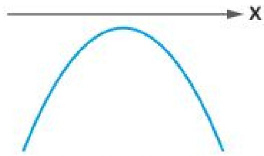
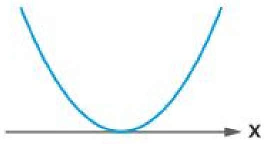
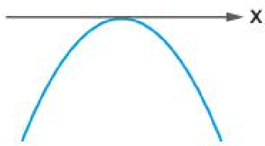

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe nessas funções que $a < 0$ e que a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

De modo geral, temos:

> Quando **a** $>$ **0**, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**.
>
> Quando **a** $<$ **0**, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**.

Podemos fazer um resumo dessas condições, usando esboços dos gráficos de funções quadráticas:

| | **$a > 0$**<br>Concavidade voltada para cima | **$a < 0$**<br>Concavidade voltada para baixo |
|---|---|---|
| **$\Delta > 0$**<br>A função tem duas raízes reais distintas e a parábola corta o eixo ***x*** em 2 pontos. |  |  |
| **$\Delta < 0$**<br>A função não tem raízes reais e a parábola não corta o eixo ***x***. |  |  |
| **$\Delta = 0$**<br>A função tem duas raízes reais iguais e a parábola tangencia o eixo ***x***. |  |  |

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

# Traçando o gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano

Traçar o gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano não é tão simples como construir a reta, que é o gráfico de uma função afim.

Para traçar uma parábola, é conveniente seguir um planejamento para se obter de forma precisa o gráfico desejado. Veja o roteiro abaixo.

(A) Determinar as coordenadas do vértice: $V(x_v, y_v)$.

(B) Organizar um quadro atribuindo à variável *x* alguns valores menores que $x_v$ e alguns valores maiores que $x_v$. E encontrar os valores de *y* correspondentes.

(C) Marcar, no plano cartesiano, os pontos (x, y) determinados.

(D) Unir esses pontos e traçar a parábola.

Seguindo esse roteiro, vamos traçar os gráficos, no plano cartesiano, de algumas funções quadráticas.

**1** Esboçar, no plano cartesiano, o gráfico da função quadrática $y = x^2 + 2x - 3$, sendo *x* um número real qualquer.

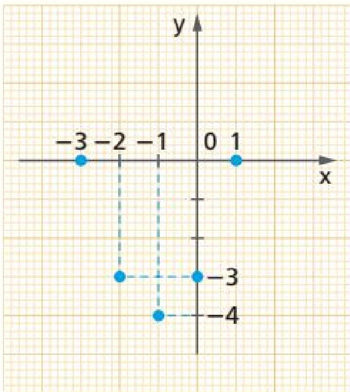
(A) Inicialmente, determinamos as coordenadas do vértice.

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(2)}{2 \cdot (1)} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\[2ex] y_v = x_v^2 + 2x_v - 3 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \end{array}\right\} V(-1, -4)$$

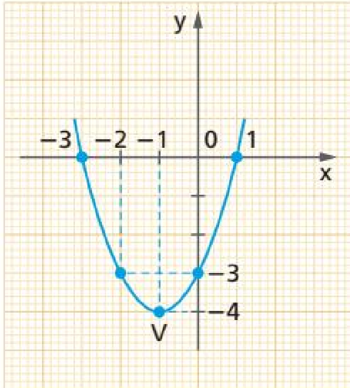
(B) Organizamos os pares:

| x | y |
|---|---|
| −3 | 0 |
| −2 | −3 |
| −1 | −4 |
| 0 | −3 |
| 1 | 0 |

(C) Marcamos os pontos:




(D) Traçamos o gráfico:




**2** Traçar o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$, sendo x um número real qualquer.

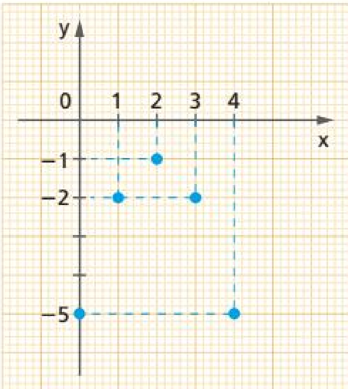
(A) Determinamos as coordenadas do vértice.

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(4)}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ y_v = -x_v^2 + 4x_v - 5 = -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 5 = -1 \end{array}\right\} V(2, -1)$$

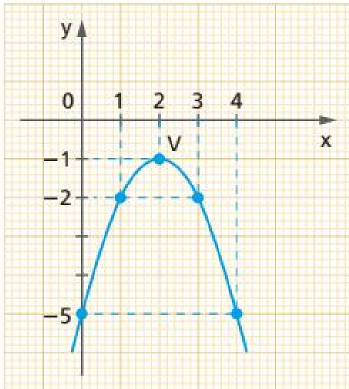
(B) Organizamos os pares:

| x | y |
|---|---|
| 0 | −5 |
| 1 | −2 |
| 2 | −1 |
| 3 | −2 |
| 4 | −5 |

(C) Marcamos os pontos:




(D) Traçamos o gráfico:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Sem fazer o gráfico e observando apenas o coeficiente *a*, verifique se a parábola que representa o gráfico de cada uma das seguintes funções tem a concavidade voltada para cima ou para baixo.

**a)** $y = x^2 - 7x + 10$

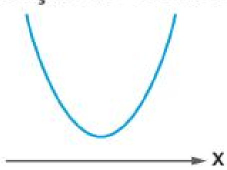
**b)** $y = 3x^2 - 7x + 4$

**c)** $y = -x^2 + 25$

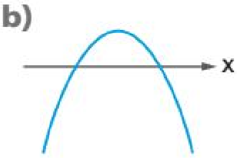
**d)** $y = -6x^2 + x + 1$

**2.** Os esboços seguintes representam gráficos de funções quadráticas definidas pela lei $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Para cada esboço, escreva no caderno a condição do coeficiente *a* e do $\Delta$.

**a)**




**b)**




**3.** Para cada uma das seguintes funções, dê as coordenadas do vértice, organize um quadro conveniente e esboce o gráfico no plano cartesiano, sendo *x* um número real qualquer.

**a)** $y = x^2 - 1$

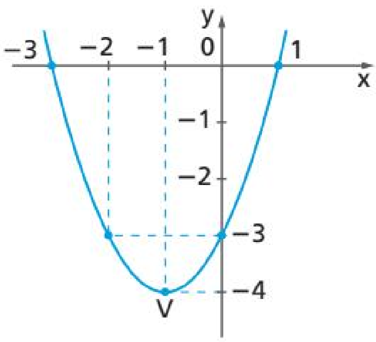
**b)** $y = -x^2$

**c)** $y = x^2 + 2x - 8$

**d)** $y = -x^2 + 6x - 9$

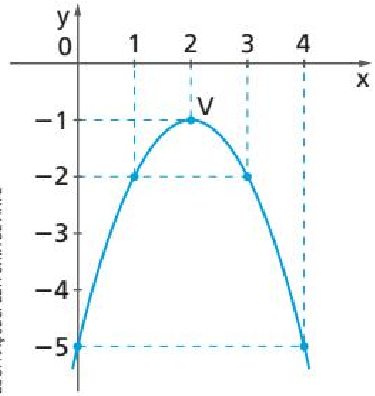
# Ponto de mínimo e ponto de máximo da função quadrática

Observe o gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$, em que $a > 0$:




Percorrendo o gráfico da esquerda para a direita, notamos que os valores de *y* vão diminuindo até atingir o vértice. Depois, esses valores vão aumentando. Nesse caso, dizemos que o vértice é o **ponto de mínimo** da função. Note que existe um menor valor para *y*, que corresponde ao $y_V$.

Agora, veja este gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$, em que $a < 0$:




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Percorrendo o gráfico, da esquerda para a direita, notamos que os valores de *y* vão aumentando até atingir o vértice. Depois, os valores de *y* vão diminuindo. Nesse caso, dizemos que o vértice é o **ponto de máximo** da função. Note que existe um maior valor para *y*, que é o $y_V$.

De modo geral, temos:

- Quando **a > 0**, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem um valor mínimo, e **o vértice é o ponto de mínimo**.
- Quando **a < 0**, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem um valor máximo, e **o vértice é o ponto de máximo**.

**FÓRUM**

As usinas hidrelétricas, termelétricas (gás natural), nucleares e o carvão são os principais meios de fornecimento de energia do Brasil, mas temos também as fontes renováveis, como a solar, a eólica e de biomassa, que podem incrementar o sistema e torná-lo menos vulnerável. Entre as opções energéticas citadas, a eólica se destaca como a mais atrativa, tanto pelos custos quanto por questões ambientais.

- Pesquise e discuta com os colegas quais são as vantagens e as dificuldades da produção de energia eólica.

Acompanhe os exemplos a seguir.

**1** A função $y = x^2 - 3x - 18$ tem ponto de mínimo ou ponto de máximo? Dar as coordenadas desse ponto.

Pela função dada, $a = 1$, então $a > 0$. Portanto, essa função tem um ponto de mínimo, cujas coordenadas são:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-3)}{2 \cdot (1)} = \dfrac{3}{2} \\ y_v = x_v^2 - 3x_v - 18 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) - 18 = -\dfrac{81}{4} \end{array}\right\} V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{81}{4}\right)$$

A função tem ponto de mínimo de coordenadas $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{81}{4}\right)$. Nesse caso, o valor mínimo da função é $-\dfrac{81}{4}$, que corresponde ao $y_v$.

**2** A função $y = -x^2 - 2x + 24$ tem ponto de mínimo ou ponto de máximo? Dar as coordenadas desse ponto.

Como na função dada $a = -1$, então $a < 0$, essa função tem um ponto de máximo, cujas coordenadas são:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{2}{-2} = -1 \\ y_v = -x_V^2 - 2x_V + 24 = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 24 = 25 \end{array}\right\} V(-1, 25)$$

A função tem ponto de máximo de coordenadas $(-1, 25)$. Nesse caso, o valor máximo da função é 25, que corresponde ao $y_V$.

## ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

**1.** Verifique se cada uma das seguintes funções tem ponto de mínimo ou ponto de máximo e dê as coordenadas desse ponto.

**a)** $y = x^2 - 8x + 6$

**b)** $y = -x^2 + 4x + 5$

**c)** $y = -6x^2 + 6x$

**d)** $y = x^2 - 16$

**e)** $y = x^2 - 4x - 45$

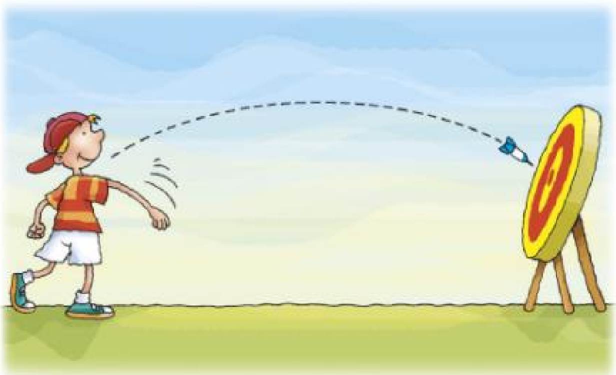
**f)** $y = 3x^2 + 6x$

**g)** $y = -x^2 + 9$

**h)** $y = 5x^2 - 8x + 3$

**2.** Sabe-se que a função $y = 3x^2 - 6x - 2$ tem um ponto de mínimo. Quais são as coordenadas desse ponto de mínimo?

**3.** Um dardo é lançado da origem, segundo um determinado referencial, e percorre a trajetória de uma parábola. A função que representa essa parábola é $y = -x^2 + 4x$. Quais são as coordenadas do ponto onde esse dardo atinge sua altura máxima?



ILUSTRA CARTOON

# TECNOLOGIAS

## Explorando a função quadrática

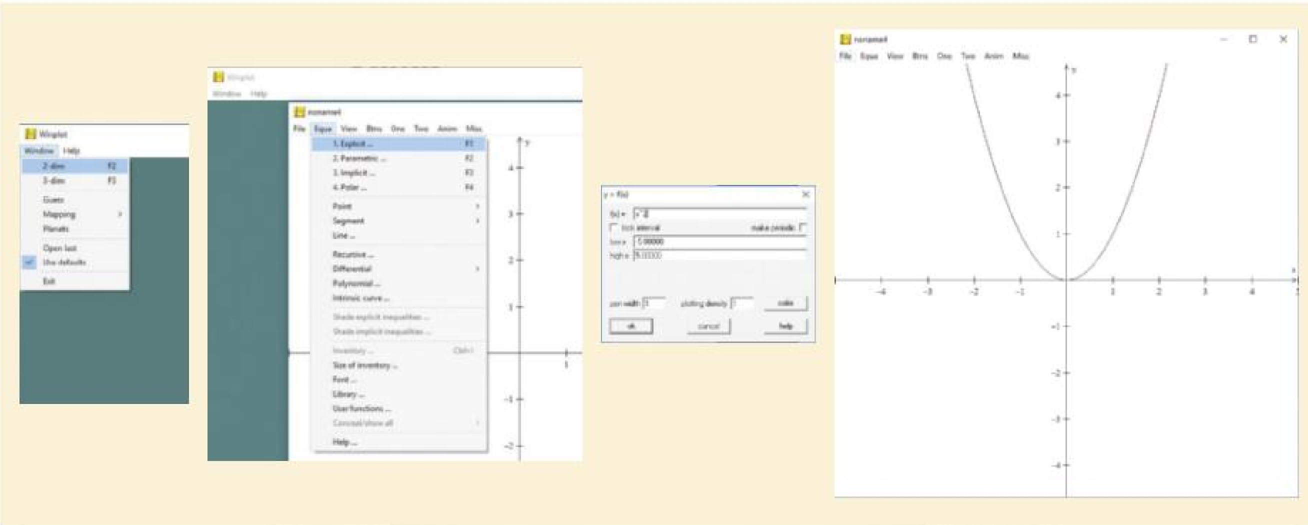
O Winplot é um programa que gera gráficos com base em funções polinomiais. Você fornece a ele a expressão algébrica e ele retorna com a representação gráfica correspondente. Com esse recurso é possível explorar e estabelecer as relações entre os coeficientes da função quadrática e a forma do gráfico.

A ideia inicial é explorar a função quadrática, na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com *a*, *b* e *c* números reais e $a \neq 0$, e entender como a representação gráfica se comporta de acordo com os valores dos coeficientes.

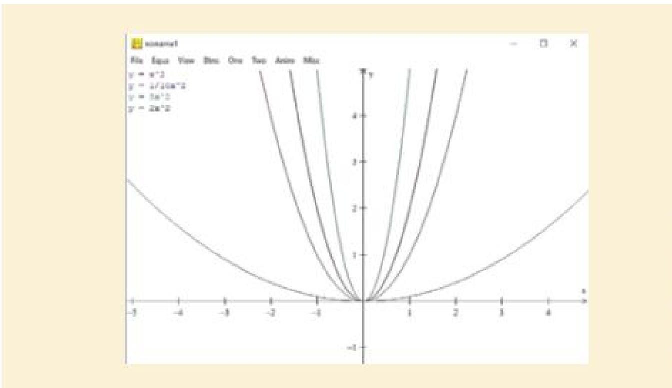
**Análise da variação do coeficiente a, com b = 0 e c = 0.**

Procedimentos:

- Ao abrir o *software*, escolher as opções: Janela $\longrightarrow$ 2 dim $\longrightarrow$ Equação $\longrightarrow$ Explícita
- Digitar a função $f(x) = x^2$ na caixa de diálogo (escrever x^2) e clicar em "ok".



- Clicar em Equação $\longrightarrow$ Explícita e digitar a função $f(x) = 2x^2$ (escrever 2x^2).
- Seguir o mesmo procedimento para as funções $f(x) = \frac{1}{10}x^2$ (escrever 1/10x^2) e $f(x) = 5x^2$ (escrever 5x^2).



FOTOS: WINPLOT 2018

Figura 1.

Analisando os gráficos da figura 1, responda as questões no caderno:

**1.** O que acontece com o gráfico quando o valor do coeficiente *a* aumenta?

**2.** Qual o vértice dessas funções?

- Agora, crie um novo arquivo e represente, em um mesmo plano, as funções $f(x) = -x^2$, $f(x) = -2x^2$, $f(x) = -\frac{1}{10}x^2$ e $f(x) = -5x^2$.

Analisando os gráficos, responda as questões no caderno:

**3.** O que acontece com o gráfico quando o valor do coeficiente *a* diminui?

**4.** Qual o vértice dessas funções?

Após essas observações, o que podemos dizer sobre o coeficiente *a* da função quadrática?

**Análise da variação do coeficiente b, com a e c fixos, com a = 1 e c = 1.**

Seguindo os mesmos procedimentos anteriores, vamos representar graficamente as funções $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $f(x) = x^2 - x + 1$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

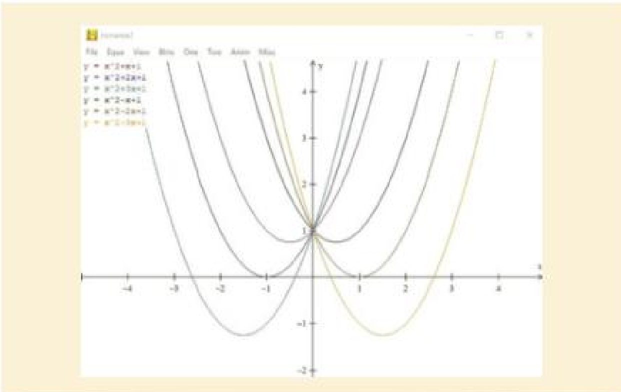


Figura 2.

Analisando os gráficos da figura 2, responda as questões no caderno:

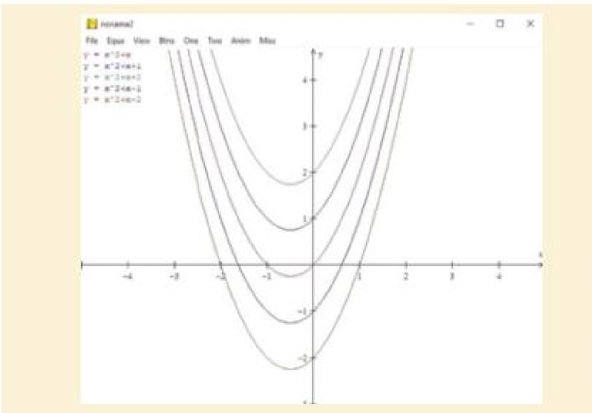
**5.** O que acontece com o gráfico quando o valor do coeficiente *b* aumenta?

**6.** O que acontece com o gráfico quando o valor do coeficiente *b* diminui?

- Após essas observações, o que podemos dizer sobre o coeficiente *b* da função quadrática?

**Análise da variação do coeficiente c, com a e b fixos, com a = 1 e b = 1.**

Seguindo os mesmos procedimentos anteriores, vamos representar graficamente as funções $f(x) = x^2 + x$, $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(x) = x^2 + x + 2$, $f(x) = x^2 + x - 1$, $f(x) = x^2 + x - 2$.



FOTOS: WINPLOT 2018

Figura 3.

Analisando os gráficos da figura 3, responda as questões no caderno:

**7.** O que acontece com o gráfico quando o valor do coeficiente *c* aumenta?

**8.** O que acontece com o gráfico quando o valor do coeficiente *c* diminui?

- Após essas observações, o que podemos dizer sobre o coeficiente *c* da função quadrática?

## RETOMANDO O QUE APRENDEU

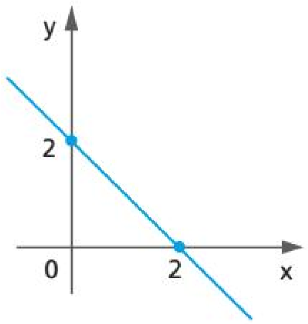
Responda às questões no caderno.

**1.** A tarifa de uma corrida de táxi é composta de duas partes: uma parte fixa, chamada bandeirada, e uma parte correspondente ao número de quilômetros que o táxi percorre. No táxi do Bruno a parte fixa ou bandeirada corresponde a 2 reais, e o preço do quilômetro percorrido é 0,53 real. Sendo *y* o preço a pagar pela corrida e *x* o número de quilômetros percorridos, a tarifa final passa a ser definida pela função $y = 2 + 0{,}53x$. Nessas condições:

**a)** Quanto custará uma corrida de 16 km no táxi do Bruno?

**b)** Quantos quilômetros Bruno percorreu com o seu táxi, em uma corrida de 8,36 reais?

**2.** A figura mostra o gráfico da função $y = -x + 2$.




EDITORIA DE ARTE

Nessas condições, responda:

**a)** Para qual valor real de *x* temos $y = 0$?

**b)** Para quais valores reais de *x* vamos ter valores positivos de *y* ($y > 0$)?

**c)** Para quais valores reais de *x* vamos ter valores negativos de *y* ($y < 0$)?

**3.** Elabore uma questão envolvendo uma função que relaciona duas grandezas de modo que elas sejam diretamente proporcionais. Em seguida, troque com um colega. Cada um resolve a questão criada pelo outro.

**4.** (Unifor-CE) Dos números abaixo, o único que NÃO pertence ao conjunto imagem da função do segundo grau definida por $y = x^2 - 3x + 2$ é:

**a)** 1

**b)** $\frac{1}{4}$

**c)** 0

**d)** $-\frac{1}{6}$

**e)** $-\frac{1}{3}$

**5.** Para cada função quadrática dada a seguir, indique no caderno as coordenadas do vértice, organize uma tabela conveniente e faça o gráfico cartesiano.

**a)** $y = -x^2 + 9$

**b)** $y = x^2 - 5x$

**c)** $y = x^2 - 4x - 5$

**d)** $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$

**6.** (UEG-GO) A função $f(x) = x^2 + 4x + 2b$ possui duas raízes reais e distintas se, e somente se,

**a)** *b* for maior ou igual a 2.

**b)** *b* for menor que 2.

**c)** *b* for qualquer número real.

**d)** *b* for qualquer número negativo.

**e)** *b* estiver entre 0 e 2.

**7.** (Saeb) O custo total *C*, em milhares de reais, para se produzir *x* máquinas é dado pela expressão $C(x) = x^2 - x + 10$. Se o custo total foi de 52 mil reais, então, o número de máquinas produzidas foi:

**a)** 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9

**8.** Uma função quadrática é dada pela lei $y = (k - 3)x^2 + x$. Para que valores de *k* o gráfico dessa função é uma parábola com a concavidade voltada para cima?

**9.** Para cada função quadrática a seguir, identifique o ponto de máximo ou de mínimo e dê suas coordenadas.

**a)** $y = x^2 - 25$

**b)** $y = -x^2 + 25$

**c)** $y = -x^2 + 10x$

**d)** $y = 4x^2 + 4x + 1$

**10.** (Udesc-SC) Uma fábrica de determinado componente eletrônico tem a receita financeira dada pela função $R(x) = 2x^2 + 20x - 30$ e o custo de produção dado pela função $C(x) = 3x^2 - 12x + 30$, em que a variável *x* representa o número de componentes fabricados e vendidos. Se o lucro é dado pela receita financeira menos o custo de produção, o número de componentes que deve ser fabricado e vendido para que o lucro seja máximo é:

**a)** 32 **b)** 96 **c)** 230 **d)** 16 **e)** 30

**11.** É dada a função $y = -x^2 + 9$. Para quais valores reais de *x* vamos ter:

**a)** $y = 0$?

**b)** $y > 0$?

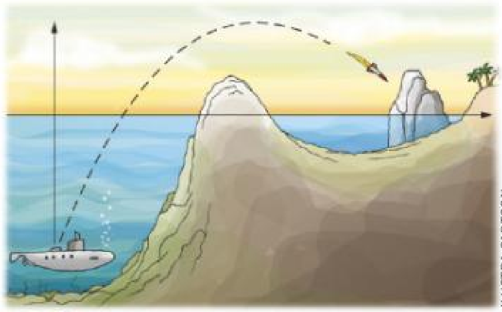
**c)** $y < 0$?

**12.** (Uneb-BA) Uma fábrica de equipamentos leves fez um estudo de sua produção e conseguiu uma fórmula, cuja expressão é $C(n) = 0,6n^2 - 120n + 10\,000$, para obter o custo *C*, em reais, em função do número *n* de peças produzidas. Nessas condições, o custo mínimo, em reais, de produção dessa fábrica é de:

**a)** 3 500 **b)** 4 000 **c)** 4 500 **d)** 5 000 **e)** 5 500

**13.** Um míssil é lançado de um submarino e desenvolve a trajetória da parábola descrita pela lei $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x - 2$. Essa trajetória é interrompida quando o míssil atinge uma rocha.

Veja o esquema abaixo.



ILUSTRA CARTOON

**a)** Para quais valores de *x* esse míssil percorre fora da água?

**b)** Que coordenadas (x, y) dão a posição da rocha?

**14.** A função $y = x^2 - 2x + 8$ é positiva para todo valor real de *x*. Essa afirmação é verdadeira ou falsa?

**15.** (UFRR) A trajetória de uma pedra, ao ser atirada no ar, é dada pela função $f(x) = -x^2 + 10x$. A altura máxima atingida pela pedra, na unidade de medida de *x*, é:

**a)** 5 **b)** 25 **c)** 10 **d)** 15 **e)** 20

## UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade estudamos a noção de função, domínio e imagem e, após reflexões sobre esses temas de base, aprofundamo-nos na função afim e sua representação gráfica, observando os zeros da função e analisando o gráfico desse modelo de função.

Estudamos também a função quadrática, seu gráfico, como obter os zeros da função, a concavidade da parábola, e analisamos o sinal de uma função quadrática. Na abertura, vimos a aplicação dessa função no movimento balístico. Vamos retomar as aprendizagens desta Unidade e refletir um pouco respondendo às questões a seguir no caderno.

- Como é a representação gráfica de uma função afim?
- Qual é a generalização do zero de uma função afim?
- Quantos zeros uma função quadrática pode ter?
- O que define o sentido da concavidade da parábola?
- Cite duas aplicações para o conceito de função quadrática.

## De olho na bandeira!

Você já ouviu falar nas bandeiras tarifárias? A cor da bandeira na cobrança da conta de luz pode interferir diretamente no orçamento mensal e anual de sua casa. Na imagem podemos perceber que essas tarifas foram aprovadas em uma audiência pública.

Observe algumas informações apresentadas pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) em 27 de julho de 2018.


ANEEL/PORTAL DA EDUCATIVA/GOVERNO DE MATO GROSSO DO SUL

Fonte: PORTAL DA EDUCATIVA. **Bandeira vermelha.** Disponível em: <http://www.portaldaeducativa.ms.gov.br/tag/bandeira-vermelha/>. Acesso em: 19 nov. 2018.

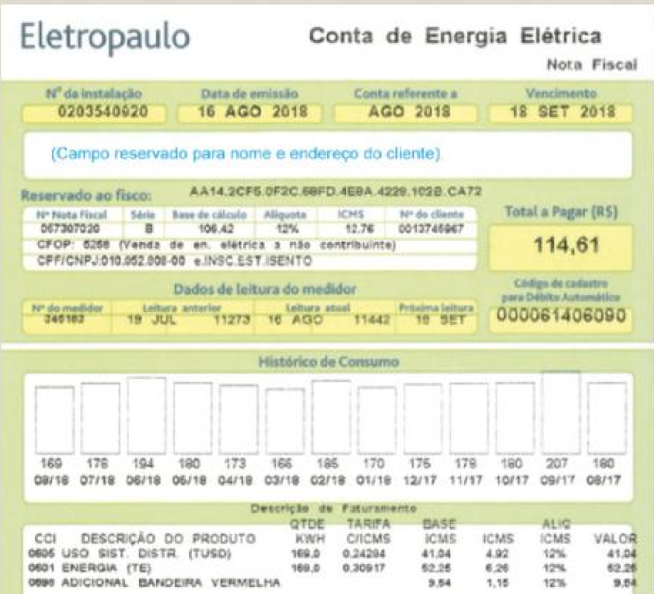
### Bandeira tarifária segue vermelha patamar 2 em agosto

**Histórico**

O sistema de bandeiras foi criado para sinalizar aos consumidores os custos reais da geração de energia elétrica. O funcionamento é simples, para que os consumidores possam assimilar que as cores verde, amarela ou vermelha indicam se a energia custa mais ou menos por causa das condições de geração. Com as bandeiras, a conta de luz ficou mais transparente e o consumidor tem a melhor informação, para usar a energia elétrica de forma mais eficiente, sem desperdícios.

Cabe frisar que as bandeiras tarifárias não promovem aumento de custos ou da tarifa. O sistema permite, a partir de sua métrica de acionamento e de seus adicionais, um ajuste mais harmônico ao fluxo de custos do processo operativo do Sistema Interligado Nacional (SIN).[...]

Fonte: ANEEL. **Bandeira tarifária segue vermelha patamar 2 em agosto**. Disponível em: <http://www.aneel.gov.br/sala-de-imprensa-exibicao/-/asset_publisher/XGPXSqdMFHrE/content/bandeira-tarifaria-segue-vermelha-patamar-2-em-agosto/656877?inheritRedirect=false&redirect=http%3A%2F%2Fwww.aneel.gov.br%2Fsala-de-imprensa-exibicao%3Fp_p_id%3D101_INSTANCE_XGPXSqdMFHrE%26p_p_lifecycle%3D0%26p_p_state%3Dnormal%26p_p_mode%3Dview%26p_p_col_id%3Dcolumn-2%26p_p_col_count%3D3>. Acesso em: 14 nov. 2018.



Eletropaulo — Conta de Energia Elétrica — Nota Fiscal

| Nº da instalação | Data de emissão | Conta referente a | Vencimento |
|---|---|---|---|
| 0203540920 | 16 AGO 2018 | AGO 2018 | 18 SET 2018 |

(Campo reservado para nome e endereço do cliente)

Reservado ao fisco: AA14.2CF5.0F2C.69FD.4E9A.4229.102B.CA72

| Nº Nota Fiscal | Série | Base de cálculo | Alíquota | ICMS | Nº do cliente |
|---|---|---|---|---|---|
| 067307020 | B | 106,42 | 12% | 12,76 | 0013745967 |

CFOP: 5258 (Venda de en. elétrica a não contribuinte)
CPF/CNPJ:010.052.008-00 e.INSC.EST.ISENTO

Total a Pagar (R$) 114,61

Dados de leitura do medidor

| Nº do medidor | Leitura anterior | | Leitura atual | | Próxima leitura |
|---|---|---|---|---|---|
| 346182 | 19 JUL | 11273 | 16 AGO | 11442 | 18 SET |

Código de cadastro para Débito Automático 000061406090

Histórico de Consumo

| 08/18 | 07/18 | 06/18 | 05/18 | 04/18 | 03/18 | 02/18 | 01/18 | 12/17 | 11/17 | 10/17 | 09/17 | 08/17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 169 | 176 | 194 | 180 | 173 | 166 | 185 | 170 | 176 | 179 | 180 | 207 | 180 |

Descrição de Faturamento

| CCI | DESCRIÇÃO DO PRODUTO | QTDE KWH | TARIFA C/ICMS | BASE ICMS | ICMS | ALIQ ICMS | VALOR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0605 | USO SIST. DISTR. (TUSD) | 169,0 | 0,24284 | 41,04 | 4,92 | 12% | 41,04 |
| 0601 | ENERGIA (TE) | 169,0 | 0,30917 | 52,25 | 6,26 | 12% | 52,25 |
| 0698 | ADICIONAL BANDEIRA VERMELHA | | | 9,64 | 1,15 | 12% | 9,64 |

ACERVO DA EDITORA

Você já analisou uma conta de energia elétrica? Veja uma imagem com algumas informações apresentadas nesse tipo de conta.

> Veja no material audiovisual o vídeo sobre Energia elétrica: usos, eficiência energética e consumo consciente.

**1.** Você concorda com a afirmação da ANEEL de que "com as bandeiras, a conta de luz ficou mais transparente e o consumidor tem a melhor informação, para usar a energia elétrica de forma mais eficiente, sem desperdícios"? Justifique sua resposta.

**2.** Em sua opinião, quais ações poderiam ser realizadas para que, de fato, as pessoas passassem a utilizar de forma mais eficiente, sem desperdícios a energia elétrica?

**3.** Juntamente com seus colegas e professor, elabore um plano de ações que possa efetivar algumas das sugestões apresentadas pela turma.

Leia o texto a seguir.

## Como é feita a cobrança de energia elétrica?

A conta de energia elétrica tem tido destaque na mídia nos últimos meses, pois a geração de energia, por conta principalmente de problemas como a falta de chuva, tem se tornado mais cara. [...]

A partir de fevereiro de 2016, em razão da melhora na quantidade de chuvas, principalmente na região Sudeste, o sistema de cobrança sofreu diminuição de seus valores, porém continuará no regime de bandeira vermelha, que agora possui dois patamares de cobrança dependendo da quantidade de termoelétricas ainda ligadas.

| Bandeira | Cobrança |
|---|---|
| **Verde** | Não há acréscimo na conta |
| **Amarela** | Acréscimo de R$ 1,50 para cada 100 KWh consumido |
| **Vermelha 1** | Acréscimo de R$ 3,00 para cada 100 KWh consumido |
| **Vermelha 2** | Acréscimo de R$ 4,50 para cada 100 KWh consumido |

[...] Podemos calcular a energia consumida através do produto da potência elétrica do aparelho pelo tempo de uso, [...]

Como exemplo, imagine uma família de quatro pessoas que consome 300 kWh mensais de energia elétrica. Após a baixa do preço na cobrança, e supondo que a empresa de fornecimento de energia cobre R$ 0,45 por cada kWh utilizado, qual seria o valor da conta de energia para a situação de cada uma das bandeiras?

Bandeira VERDE : 300 kWh · 0,45 = R$ 135,00
Bandeira AMARELA: (300 kWh · 0,45) + 4,5 = R$ 139,50
Bandeira VERMELHA 1: (300 kWh · 0,45) + 9,00 = R$ 144,00
Bandeira VERMELHA 2: (300 kWh · 0,45) + 13,5 = R$ 148,50

Fonte: MUNDO EDUCAÇÃO. **Como é feita a cobrança de energia elétrica?** Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/como-feita-cobranca-energia-eletrica.htm>. Acesso em: 14 nov. 2018.

**4.** Observe uma conta de luz, de preferência, do local onde você reside e responda:

**a)** Na conta de luz, é possível observar a cobrança de impostos? Identifique, na conta que analisou, o valor dos impostos. Em seguida, faça uma pesquisa para descobrir qual a finalidade desses impostos.

**b)** Observando o valor praticado pela bandeira verde, podemos concluir que há uma função que define o valor a ser pago em decorrência do consumo? Qual seria a função que define a bandeira verde?

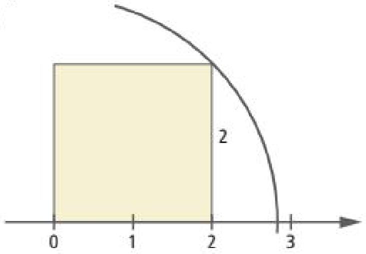
# RESPOSTAS

## UNIDADE 1

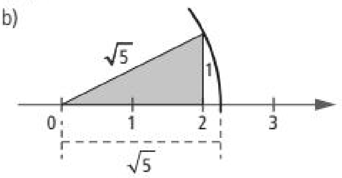
### Números reais, potências e radicais

**Atividades p. 18**

1. a) $\sqrt{8}$
   b)




   c) 2,83
2. a) $\sqrt{5}$
   b)




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

3. 2,24
4. $\sqrt{7}$; 2,64

**Atividades p. 20**

1. a) 50,24 cm; b) 2,826 cm; c) 15,7 cm; d) 43,96 cm
2. 18 cm
3. a) 1,884 m; b) 9 420 m
4. Aproximadamente 69,08 cm.
5. 25 voltas.
6. 314 mudas.

**Atividades p. 22**

1. a) 7
   b) $-3$ e 7
   c) $-3$
   d) $-\frac{3}{2}$; $-1{,}4$; 0,3333...
2. $\frac{27}{10}$
3. a) V; b) V; c) F; d) F

**Pense e responda p. 24**

1. 2; 4; 8; 16; 32; 64
2. a) 64; b) 1 024; c) $2^n$

**Atividades p. 27**

1. a) 64; b) $+169$; c) $-343$; d) $-0{,}9$; e) 125; f) $+10{,}24$; g) $-225$; h) $-\frac{32}{243}$; i) $+81$
2. a) 7 777
   b) 4 algarismos iguais.
   c) 28
3. $+32$
4. $-109$
5. $-3$
6. Não é raiz.
7. a) $\neq$; b) $=$; c) $\neq$; d) $=$
8. 380
9. $5^4$
10. Alternativa *e*.
11. a) $+1$; b) $+1$; c) $+1$; d) $-1$

**Atividades p. 31**

1. a) 3; b) 1; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{9}$; e) $\frac{1}{27}$; f) $\frac{1}{81}$
2. a) 0,5; b) 0,03125; c) 0,25; d) $-0{,}0625$; e) 0,015625; f) 0,1; g) 0,001; h) 0,04
3. a) $7^{-5}$; b) $10^{-9}$; c) $5^{-6}$; d) $2^{-10}$
4. 3
5. a) 2; b) 25; c) $-\frac{8}{125}$; d) 64
6. a) $-\frac{2}{3}$; b) 8; c) $-\frac{8}{81}$; d) 1
7. $-\frac{5}{6}$
8. 6
9. a) $7^3$; b) $2^{-1}$; c) $8^{-5}$; d) $5^{12}$; e) 8; f) $2^3$; g) $2^{-3}$; h) $3^{-1}$
10. a) $x^2$; b) $x^2$; c) $x^{-12}$; d) $a^{-3}$
11. a) $10^2$; b) $5^7$; c) $2^{-5}$; d) $3^{-3}$
12. a) $7^{-2} \cdot 13^{-2}$; b) $9^{-3} : 5^{-3}$; c) $2^{-2} : 5^{-4}$; d) $3^{-4} : 10$; e) $2^{-10} \cdot 3^4 \cdot 11^2$; f) $7^{-2} : 10^4$

**Atividades p. 33**

1. $\frac{1}{10^{10}}$ ou $10^{-10}$
2. $7 \cdot 10^6$
3. $4 \cdot 10^7$ t
4. a) $2{,}3 \cdot 10^{22}$
   b) $6{,}8 \cdot 10^3$ e $2{,}05 \cdot 10^8$
   c) $1{,}06 \cdot 10^{-8}$
5. a) $1 \cdot 10^{-2}$ m; b) $1 \cdot 10^6$ L; c) $1 \cdot 10^{-6}$ g

**Por toda parte p. 34**

1. Pesquisa do aluno.

**Educação financeira p. 35**

1. a) R$ 709,50; b) R$ 1 109,50

**Atividades p. 37**

1. Duas; $\sqrt[4]{-16}$ e $\sqrt{-1}$.
2. 36; 144; 10; 100; 25
3. Sim, 11.
4. Sim, pois $\sqrt{25} = 5$.
5. a) 0,5; b) 0,2; c) 8; d) $-10$; e) $-1$; f) $-5$

**Atividades p. 40**

1. a) 3; b) 7; c) 10; d) $5a^2$
2. a) 7; b) 3; c) 5; d) 2; e) 3; f) 7
3. a) $x = 7$; b) $x = 1$; c) $x = 1$; d) $x = 2$
4. a) $\sqrt[3]{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt[4]{10}$; d) $\sqrt[5]{5^4}$
5. a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt[3]{3}$; c) $\sqrt[4]{3}$; d) $\sqrt[3]{2^2}$; e) $\sqrt[4]{2^3}$; f) $\sqrt[6]{2^5}$
6. a) $x = 4$; b) $x = 3$
7. a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$; b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x}$; c) $\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{11}$; d) $\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}$; e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; f) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^y}$
8. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; b) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{7}$; c) $\sqrt[9]{5} \cdot \sqrt[9]{7}$; d) $\sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{3} \cdot \sqrt[7]{5}$; e) $\sqrt[10]{3} \cdot \sqrt[10]{5}$; f) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{11}$

**Atividades p. 42**

1. a) $11\sqrt{3}$; b) $2\sqrt[6]{7}$; c) $10\sqrt[5]{3}$; d) $6\sqrt{6}$; e) $8\sqrt{2}$; f) $35\sqrt[3]{7}$
2. a) $x^2\sqrt{x}$; b) $y\sqrt[3]{y}$; c) $x^4\sqrt{x}$; d) $y^2\sqrt[5]{y^2}$; e) $xy\sqrt{y}$; f) $xy\sqrt[5]{y^2}$; g) $y\sqrt[9]{y}$; h) $x\sqrt[10]{x^3}$
3. a) $5\sqrt{3}$; b) $10\sqrt{7}$; c) $5\sqrt[3]{2}$; d) $2\sqrt[5]{6}$; e) $2\sqrt[4]{11}$; f) $20\sqrt{2}$; g) $30\sqrt{2}$; h) $5\sqrt[3]{3}$; i) $30\sqrt{3}$; j) $2\sqrt[6]{10}$
4. a) 7,05; b) 5,19; c) 8,92; d) 12,2; e) 14,1; f) 22,3; g) 17,08; h) 25,95
5. 72 m
6. 24
7. a) 2; b) 10
8. $20\sqrt{3}$

**Para quem quer mais p. 43**

1. $128\sqrt{14}$ m² ou 473,6 m².

## Atividades p. 44

1. a) $\sqrt{162}$ f) $\sqrt{64a}$
   b) $\sqrt{28}$ g) $\sqrt{4a^3}$
   c) $\sqrt{500}$ h) $\sqrt[10]{x^{13}}$
   d) $\sqrt[3]{250}$ i) $\sqrt[3]{432b^4}$
   e) $\sqrt[5]{64}$
2. a) $\sqrt[18]{x^5}$ b) $\sqrt[10]{x^7y^3}$
3. $\sqrt{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[8]{3^7}$
5. $x\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}$

## Atividades p. 46

1. a) $5\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{6}$
2. 70,5
3. a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{1}{5}$
4. 200,9 cm
5. 129,85 m
6. $19\sqrt{3} - 14\sqrt{2}$

## Atividades p. 48

1. a) $4\sqrt{3}$ d) $100\sqrt{3}$
   b) $3\sqrt{6}$ e) $120\sqrt{2}$
   c) $14\sqrt{6}$ f) $1\,680\sqrt{6}$
2. Perímetro: $68\sqrt{2}$ cm; área: 570 cm².
3. 1 250 m²
4. a) $7\sqrt{5} + 5$
   b) $3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$
   c) $4\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$
5. $134 - 66\sqrt{3}$
6. a) $11 + 2\sqrt{10}$ c) $9 + 2\sqrt{14}$
   b) $14 - 6\sqrt{5}$ d) $17 - 2\sqrt{70}$
7. a) $\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{6}$
   b) $\sqrt[4]{3}$ d) $2\sqrt{10}$
8. a) $2\sqrt{2}$ c) $9\sqrt{2}$
   b) $9\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{2}$
9. $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$

## Atividades p. 50

1. a) $\sqrt[6]{2^2}$, $\sqrt[6]{3^3}$
   b) $\sqrt[21]{a^9}$, $\sqrt[21]{b^{14}}$
   c) $\sqrt[20]{3^8}$, $\sqrt[20]{3^{15}}$
   d) $\sqrt[42]{2^{15}}$, $\sqrt[42]{2^{18}}$
   e) $\sqrt[30]{3^6}$, $\sqrt[30]{2^5}$, $\sqrt[30]{2^8}$
   f) $\sqrt[10]{3^8}$, $\sqrt[10]{6}$, $\sqrt[10]{2^5}$
2. a) $\sqrt[30]{2^3} < \sqrt[30]{2^4}$
   b) $\sqrt[36]{3^{30}} > \sqrt[36]{3^{22}}$
   c) $\sqrt[24]{2^9} < \sqrt[24]{2^{12}}$
3. a) $\sqrt[15]{10^8}$ e) $\sqrt[30]{5}$
   b) $\sqrt[10]{7^3}$ f) $\sqrt[6]{7}$
   c) $\sqrt[4]{3^3}$ g) $4\sqrt[4]{2}$
   d) $\sqrt[20]{2^3}$ h) $\sqrt[24]{6^{11}}$
4. a) $\sqrt[24]{a^{11}b}$ c) $\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^5}}$
   b) $\sqrt[18]{a^5b^6}$ d) $\sqrt[12]{a^5}$
   e) $\sqrt[12]{a^7b}$
5. Alternativa *a*.

## Atividades p. 51

1. a) 21 d) $4\sqrt[4]{2}$
   b) $2\sqrt[3]{2}$ e) $\frac{5}{2}$
   c) 192 f) 2
2. a) $a^2b$ c) $a^4b^5\sqrt[3]{b}$
   b) $ab^4\sqrt[3]{a}$ d) $\frac{a^3}{b}$
3. $4\sqrt{2}$
4. 8 000
5. 1,22
6. a) $5 + 2\sqrt{6}$ d) $14 + 4\sqrt{10}$
   b) $8 - 2\sqrt{7}$ e) 4
   c) 7

## Atividades p. 53

1. a) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ g) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$
   b) $\sqrt{6}$ h) $\frac{\sqrt{7}}{7}$
   c) $3\sqrt{3}$ i) $\frac{\sqrt{6}}{5}$
   d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ j) $\frac{\sqrt{21}}{2}$
   e) $2\sqrt{5}$
   f) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
2. a) $\frac{\sqrt{3} - 3}{3}$ d) $\frac{3 - \sqrt{6}}{3}$
   b) $\frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$ e) $\sqrt{2} + 1$
   c) $\frac{5 + \sqrt{10}}{5}$ f) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{10}}{5}$
3. a) $\frac{\sqrt{30}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
   b) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{15}}{3}$
   c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{10}}{4}$
4. a) 1,224 c) 0,707
   b) 0,632 d) 0,816
5. a) $\frac{\sqrt[5]{6^2}}{6}$ d) $2\sqrt[10]{3^5}$
   b) $3\sqrt[3]{5^2}$ e) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$
   c) $\sqrt[9]{2^2}$ f) $2\sqrt[11]{10^3}$
6. a) $\frac{3 + \sqrt{6}}{3}$ d) $\frac{8 - 5\sqrt{2}}{7}$
   b) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ e) $-\sqrt{2}$
   c) $2\sqrt{3} + 1$ f) $5 - 2\sqrt{6}$

## Atividades p. 55

1. a) $2^{\frac{3}{7}}$ d) $2^{\frac{5}{2}}$ g) $11^{\frac{1}{2}}$
   b) $10^{\frac{4}{5}}$ e) $2^{\frac{1}{6}}$ h) $2^{\frac{3}{4}}$
   c) $7^{\frac{2}{3}}$ f) $5^{\frac{1}{9}}$
2. a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[7]{3^5}$
   c) $\sqrt[4]{10^3}$ f) $\sqrt[7]{8^5}$
   d) $\sqrt{7}$ g) $\sqrt[2]{6^3}$
   e) $\sqrt[3]{6^4}$ h) $\sqrt[9]{7^4}$
3. $x^{\frac{5}{6}}$; $\sqrt[6]{x^5}$
4. a) $3^{\frac{1}{6}}$ b) $3^{\frac{5}{6}}$ c) $3^{\frac{1}{2}}$

## Atividades p. 57

1. a) 8 e) 2
   b) 28 f) 2
   c) 36 g) 11
   d) 4

## Retomando o que aprendeu p. 58

1. a) V d) V
   b) V e) F
   c) F
2. a) Finita.
   b) Infinita e periódica.
   c) Infinita e não periódica.
3. a) Sim; $\frac{49}{7}$
   b) $-97$; $\frac{49}{7}$
   c) $-\sqrt{3}$ e $\pi$
   d) $-\sqrt{3}$ e $\pi$
   e) $1,\overline{25}$; $\frac{49}{7}$; $-97$; $\frac{3}{5}$
4. Alternativa *c*.
5. Alternativa *a*.
6. Alternativa *e*.
7. Alternativa *d*.
8. Alternativa *c*.
9. Alternativa *e*.
10. Alternativa *a*.
11. Alternativa *d*.
12. Alternativa *a*.
13. Alternativa *d*.
14. Alternativa *c*.
15. Alternativa *b*.

# UNIDADE 2

## Produtos notáveis e fatoração

## Atividades p. 67

1. a) $64x^2 - 1$
   b) $100 + 60x + 9x^2$
   c) $49a^2 - 14ab + b^2$
   d) $x^2 + xy + 0,25y^2$
   e) $a^2x^2 - b^2$
   f) $a^4 - 8a^2y + 16y^2$
   g) $1,96 - a^2b^2c^2$
   h) $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$
   i) $x^8 + 10x^4y^3 + 25y^6$
   j) $b^2c^2 - \frac{1}{4}a^4$
2. a) $9x^4 - 4c^2$ b) $a^4b^4 - 6,25c^2$
3. Alternativa *a*.
4. Alternativa *d*.

5. a) $9x^{10} - 3x^5 + 0{,}25$
b) $-3$
c) $-6{,}75$
6. a) V
b) F; $9y^2 - a^2$
c) F; $4c^2 - 4ac + a^2$
d) V
7. $(2ax + 5)^2 = 4a^2x^2 + 20ax + 25$
8. Alternativa *a*.
9. 16
10. $-2ab$
11. $xy + a^3$
12. 450
13. Alternativa *d*.
14. Alternativa *d*.
15. Alternativa *c*.
16. Não. A resposta correta é $4x^2 - 4xy^3 + y^6$.
17. a) $4 - x$ b) $3x^2$
18. O polinômio procurado é $8x - 8y$.

**Atividades p. 69**

1. a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
b) $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$
c) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
d) $1 - 6a + 12a^2 - 8a^3$
e) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
f) $27y^3 - 27y^2 + 9y - 1$
2. a) $a^2b - ab^2$
b) $-2y^3 + 20x^2y + 2xy^2$
c) $3a^2 - 7a + 2$

**Atividades p. 70**

1. a) $2 \cdot 27$; $3 \cdot 18$; $6 \cdot 9$
b) $2 \cdot 60$; $4 \cdot 30$; $10 \cdot 12$. Essas são algumas possibilidades de respostas; existem outras.
2. a) $(x + y)(x - y)$
b) $(b + c)(b - c)$

**Atividades p. 74**

1. a) $10(x + y)$
b) $y(y + 9x)$
c) $0{,}5(x - 2y)$
d) $ab(1 - a^2b^2)$
e) $ax(a + b)$
f) $x^2y^2(1 - x^3y^3)$
g) $\frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{3}b\right)$
h) $2{,}5a(x^2 - 1)$
2. a) $b(b - a - 1)$
b) $8x^3(3x^2 - x - 7)$
c) $a^3(a^4 + a^2 + 1)$
d) $20ax(6x^2 - 5x + 3)$
e) $\frac{1}{2}ab\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a - b\right)$
3. 2006
4. a) $(x + y)(a - b)$
b) $(p + h)(x + y)$
c) $(a - x)(b - c)$
5. $5a(x^2 - y^2)$; 2 500
6. $xy(y^2 + 7y - 3)$; 102
7. $(2x - y)(a + b + c)$; 2 000
8. a) $(a + b) \cdot (a + x)$
b) $(a - 1) \cdot (x + b)$
c) $(a^2 + 1) \cdot (a^3 + 2)$
d) $(x^2 - 2y) \cdot (b + 5)$
e) $(b^2 + 1) \cdot (2 - k)$
f) $(5y - 4) \cdot (y^2 + 2)$
g) $(a^4 + 1) \cdot (a^8 - 1)$
h) $(2a + 1) \cdot (n - m)$
i) $(x + 1) \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right)$
9. $-2{,}75$
10. a) $(a - b + c)(x + y)$
b) $(a + b + 1)(m - n)$
c) $2(a + b)(x + y)$
11. $(x - z)(x + 2y)$; 135
12. 117

**Atividades p. 76**

1. a) $(a + 8)(a - 8)$
b) $(10 + b)(10 - b)$
c) $(x + 0{,}5)(x - 0{,}5)$
d) $(4b + 3c)(4b - 3c)$
e) $(1 + xy)(1 - xy)$
f) $(a^2 + c^2)(a^2 - c^2)$
g) $(a^3b^3 + 0{,}1)(a^3b^3 - 0{,}1)$
h) $(x^2 + 10)(x^2 - 10)$
i) $(3 + y^3)(3 - y^3)$
j) $(9r + s^2)(9r - s^2)$
2. a) $\left(\frac{1}{2} + 3x\right)\left(\frac{1}{2} - 3x\right)$
b) $\left(\frac{1}{10} + ab\right)\left(\frac{1}{10} - ab\right)$
c) $\left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{5}a^2 - \frac{1}{2}y\right)$
d) $\left(b + \frac{1}{4}c\right)\left(b - \frac{1}{4}c\right)$
3. 40
4. $(ab + x)(ab - x)$; 105
5. a) $x(x - 8)$
b) $(y + 6)(y - 4)$
c) $(a + b + c)(a + b - c)$
d) $(n + 11)(n - 1)$
e) $(4x - 1)(2x - 1)$
f) $3(2a^3 + 3)$
g) $-y(2x + y)$
h) $-1(2a + 1)$

**Atividades p. 78**

1. a) Sim.
b) Não.
c) Sim.
d) Sim.
2. $(x + 9)^2$
3. $(x - 0{,}2)^2$
4. a) $(2x - 3y)^2$
b) $(y + 11)^2$
c) $(9p - 1)^2$
d) $(2b + 4x)^2$
e) $(10p - x)^2$
f) $(12xy + 1)^2$
g) $(m - 6)^2$
h) $(4a^2 + b)^2$
i) $(10 - bc)^2$
j) $(x^5 + 2y^3)^2$
5. 2a
6. 189
7. 121

**Atividades p. 81**

1. a) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
b) $(b - c)(b^2 + bc + c^2)$
c) $(a - 1)(a^2 + a + 1)$
d) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
e) $(3 - m)(9 + 3m + m^2)$
f) $\left(\frac{1}{5} + c\right)\left(\frac{1}{25} - \frac{c}{5} + c^2\right)$
2. a) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
b) $3(x - 1)^2$
c) $x(m + 1)(m - 1)$
d) $5(a + 3b)^2$
e) $xy(x + y)(x - y)$
f) $(m^4 + n^4)(m^2 + n^2)(m + n)(m - n)$
g) $(x + y)^2 (x - y)$
h) $a(a - x)(a^2 + ax + x^2)$
i) $\left(1 + \frac{1}{4}p^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}p\right)\left(1 - \frac{1}{2}p\right)$
j) $y\left(y + \frac{2}{3}\right)^2$
k) $y(x - 1)(x^2 + x + 1)$
l) $(a + b)(x + 1)(x - 1)$
m) $(a + b)(a + 1)^2$
n) $2x(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
o) $(a + b)^2(a - b)(a^2 - ab + b^2)$
3. 180
4. $(a + b)(b + c)(b - c)$
5. $xy(x + y)^2$; 250
6. $x(a + b)(x + 1)(x - 1)$
7. a) 0 e 9.
b) $-9$ e 9.
c) $-8$ e 8.
d) $-20$ e 0.
e) 0 e 1.
f) $-0{,}5$ e $0{,}5$.
g) $-1$ e 1.
h) $-0{,}6$ e 0.
i) $0{,}1$ e $-0{,}1$.
j) 0 e $\frac{1}{4}$.
8. Alternativa *a*.
9. Alternativa *b*.
10. Para $x = 0$: $\frac{2x + 3}{2x - 3} = -1$;
Para $x = 1$: $\frac{2x + 3}{2x - 3} = -5$
11. 225
12. 60

**Tratamento da informação p. 82**

1. a) Aproximadamente 34,63 °C
b) 36 °C
2. a) 19 °C
b) 39 °C
c) 20 °C
3. As temperaturas máximas variaram entre 19 °C e 39 °C, com amplitude de 20 °C. A média de 34,63 °C se aproxima do limite superior, e a mediana de 36 °C indica que em muitos dias do mês de setembro as temperaturas estavam próximas a esse valor.

**Retomando o que aprendeu p. 84**

1. Alternativa *b*.

2. Alternativa *c*.
3. Alternativa a.
4. 2
5. Alternativa e.
6. Alternativa *a*.
7. Alternativa *a*.
8. a) $9x^2 - 1$
   b) $100 + 40x + 4x^2$
   c) $49a^2 - 28ab + 4b^2$
   d) $4x^2 + 2xy + 0{,}25y^2$
   e) $9x^2 - b^2$
   f) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
   g) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$
   h) $8 - 36a + 54a^2 - 27a^3$
9. a) $b(b - 2a + 1)$
   b) $6x^3(3x^2 + x - 7)$
   c) $2a(a^4 + a^2 + 1)$
   d) $20ax(5x^2 - 3x + 6)$
   e) $(a + 7)(a - 7)$
   f) $(8 + b)(8 - b)$
   g) $(2 + ab)(2 - ab)$
10. 4a
11. 252
12. Alternativa *b*.
13. Alternativa *d*.

# UNIDADE 3

## EQUAÇÕES DO 2º GRAU

### Pense e responda p. 88

1. a) $x^2$
   b) $3x$
   c) $x^2 - 3x = 4$
   d) O número é 4.
   e) Resposta pessoal.

### Atividades p. 90

1. *a*, *d*, *e*, *f*.
2. a) Completa.
   b) Completa.
   c) Incompleta.
   d) Completa.
   e) Incompleta.
   f) Incompleta.
3. a) $a = 10, b = 3, c = -1$
   b) $a = 1, b = 2, c = -8$
   c) $a = 1, b = -3, c = -4$
   d) $a = 7, b = 10, c = 3$
   e) $a = -4, b = 6, c = 0$
   f) $a = 1, b = 0, c = -16$
   g) $a = -6, b = 1, c = 1$
   h) $a = 5, b = -10, c = 0$
4. a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
   b) $4x^2 - 6x + 2 = 0$
   c) $4x^2 - 25 = 0$
   d) $-21x^2 - 7x = 0$

### Atividades p. 91

1. $x^2 + 2x - 35 = 0$
2. a) $x^2 - x - 12 = 0$
   b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   c) $-3x^2 - 10x - 8 = 0$
   d) $2x^2 - 3x - 4 = 0$
   e) $5x^2 - 2 = 0$
   f) $x^2 - 10x + 2 = 0$
   g) $x^2 - 12 = 0$
   h) $x^2 + 8x + 3 = 0$
   i) $4x^2 + x - 1 = 0$
3. $3x^2 - 2x - 21 = 0$

### Atividades p. 93

1. a) $\{0, 15\}$
   b) $\{-9, 9\}$
   c) $\{-11, 11\}$
   d) $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$
   e) $\{0, 1\}$
   f) $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$
   g) $\varnothing$
   h) $\left\{0, \frac{1}{11}\right\}$
   i) $\left\{-\frac{6}{7}, \frac{6}{7}\right\}$
   j) $\{0, 9\}$
   k) $\{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$
   l) $\left\{-\frac{3}{5}, 0\right\}$
2. a) $\{0, 9\}$
   b) $\{0, 1\}$
   c) $\left\{0, \frac{13}{6}\right\}$
3. a) $\{0, 1\}$ b) $\{0, -4\}$
4. O número é 7.
5. a) 5,625
   b) $-3$ ou 3
6. $9 + 5 = 14$
7. 30 m
8. 4 cm; 12 cm.

### Pense e responda p. 94

1. a) 4 b) 1 c) 25

### Atividades p. 98

1. a) $(4)^2$ ou 16.
   b) $(5)^2$ ou 25.
   c) $(1)^2$ ou 1.
   d) $(6)^2$ ou 36.
   e) $\left(\frac{9}{2}\right)^2$ ou $\frac{81}{4}$.
   f) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ ou $\frac{25}{4}$.
   g) $(15)^2$ ou 225.
   h) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ou $\frac{1}{4}$.
   i) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ou $\frac{9}{16}$.
   j) $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ ou $\frac{1}{36}$.
   k) $a^2$
   l) $(3a)^2$ ou $9a^2$.
2. a) $-5$ e 3.
   b) $-6$ e 2.
   c) $-8$ e $-4$.
   d) $-7$ e 1.
   e) $-5$ e 2.
   f) $-1$
   g) $-3$ e 1.
   h) $-5$
   i) 3 e 7.
   j) 2 e 8.
   k) $-\frac{1}{3}$ e 1.
   l) $-\frac{1}{5}$ e $-\frac{1}{2}$.

### Atividades p. 102

1. a) $-5$ e 1. b) $\frac{1}{2}$ e 4. c) $-4$
2. a) $\{-4, 7\}$
   b) $\{-6\}$
   c) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$
   d) $\varnothing$
3. a) $\{2\}$
   b) $\{-1, 4\}$
   c) $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$
   d) $\varnothing$
4. Como as raízes são $-3$ e 5, existem 7 números inteiros: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ e 4.
5. A raiz comum é 17, e as não comuns são $-5$ e 3. Logo, $-5 + 3 = -2$.
6. A raiz fracionária é $\frac{5}{4}$; logo, $5 + 4 = 9$.
7. a) $\{-4, -1\}$
   b) $\{-5, 1\}$
8. 2
9. A maior raiz dessa equação é 1, e 1 não é primo; portanto, não podemos afirmar que a maior raiz é um número primo.
10. a) $S = \left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$
    b) $S = \{-6, 1\}$
11. a) $\{-9, -1\}$
    b) $\left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$
    c) $\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$
12. 1 ou 6.
13. 6 ou 1.
14. 10 ou 1.
15. $-6$ ou 1.
16. 4 ou $-5$.
17. 14 horas.
18. 15
19. 50 m e 22 m.
20. a) 6 lados.
    b) 8 lados.
21. a) 10 m e 7 m.
    b) 34 m
22. 14 m e 10 m.
23. a) 20; 80
    b) 82
24. 15 m
25. 5 cm

### Tecnologia p. 104

1. a) Não tem raiz real.
   b) A raiz é 3.
   c) As raízes são 0 e $\frac{53}{3}$.
2. Sim, são as raízes.
3. Resposta pessoal.

**Atividades p. 108**

1. a) $x' + x'' = 1$ $x' \cdot x'' = -20$

   b) $x' + x'' = -\frac{1}{2}, x' \cdot x'' = \frac{1}{16}$

   c) $x' + x'' = \frac{2}{3}, x' \cdot x'' = -\frac{1}{2}$

   d) $x' + x'' = -\frac{3}{10}, x' \cdot x'' = -\frac{2}{5}$

2. a) 6
   b) $-16$
   c) $-\frac{3}{8}$

3. a) $S = 3$ e $P = -18$
   b) $S = \frac{7}{5}$ e $P = -\frac{6}{5}$
   c) $S = \frac{9}{2}$ e $P = \frac{9}{2}$

4. $-17$
5. $-0{,}5$
6. a) $S = 4\sqrt{2}$ e $P = 3$
   b) $S = \sqrt{2}$ e $P = -3$
7. $c = 1{,}25$
8. $-2$ ou 2
9. 5
10. 8
11. $h = 7$
12. $k = 1$
13. a) 3 e 2.
    b) 6 e 4.
    c) 6 e $-2$.
14. $x' = 1$ e $x'' = 4$; $A = 4$ e $P = 10$

**Atividades p. 110**

1. a) $\{-3, 3\}$
   b) $\{-2, 2\}$
   c) $\{0, -4, 4\}$
   d) $\{-2, 2\}$
2. $-1$ e 1.
3. a) $\{-3, 3, -2, 2\}$
   b) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
   c) $\{-2, 2\}$
   d) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, -2, 2\}$
4. $5 + 1 = 6$
5. Duas: $-2$, 2
6. Sim; pois as raízes são $-1$, 1, $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

**Atividades p. 111**

1. $\{2\}$
2. 4 ou 2
3. $\{2\}$
4. $\{-4, 5\}$
5. $\{1, 4\}$
6. $x = 4$ ou $x = -3$

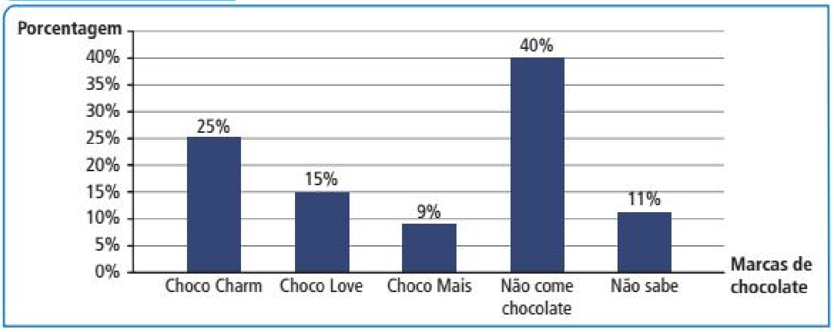
**Tratamento da informação p. 112**

1. a) 25%
   b) Não está correto, pois a escala do eixo vertical vai de 0% a 100% e o tamanho da barra indica uma preferência de quase 90%.
   c) Sim, pois os tamanhos das colunas não estão proporcionais. Por exemplo, 40% dos consumidores entrevistados não escolheram nenhum chocolate, mas esta coluna é menor que a coluna que representa 25%.
   d) **Preferência dos consumidores**

| Marca do chocolate | Porcentagem |
|---|---|
| Choco Charm | 25% |
| Choco Love | 15% |
| Choco Mais | 9% |
| Não come chocolate | 40% |
| Não sabe | 11% |
| Total | 100% |

Fonte: Pesquisa da ChocoCharm.

**Preferência dos consumidores**



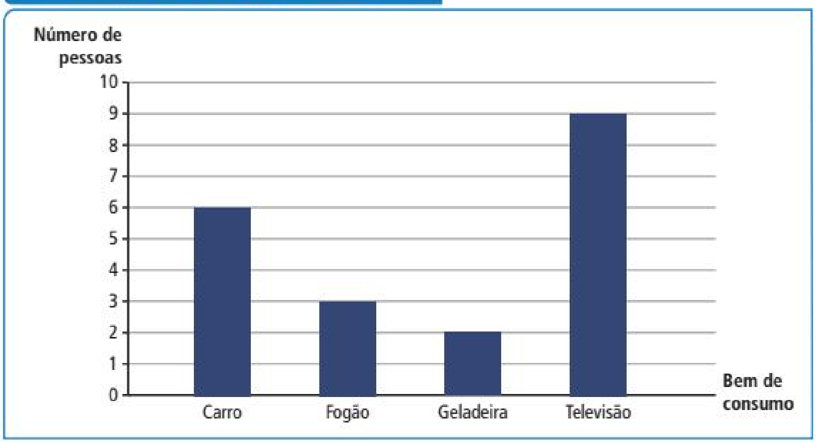

Fonte: Pesquisa da ChocoCharm.

2. a) Não, pois o gráfico não mostra a evolução da venda de carros ao longo dos meses.
   b) **Bens de consumo duráveis**

| Bens duráveis | Quantidade |
|---|---|
| Carro | 6 |
| Fogão | 3 |
| Geladeira | 2 |
| Televisão | 9 |

Fonte: Dados fictícios.

   c) **Bens de consumo duráveis adquiridos nos últimos 4 meses**




Fonte: Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

   d) Não. O gráfico de linhas é indicado para mostrar uma tendência, crescente ou decrescente, em um período de tempo, por exemplo.

**Retomando o que aprendeu p. 114**

1. Alternativa *d*.
2. Alternativa *a*.
3. Alternativa *c*.
4. Alternativa *e*.
5. Alternativa *b*.
6. Alternativa *e*.
7. 5
8. $\{2\}$
9. Alternativa *a*.
10. Alternativa *d*.
11. Alternativa *c*.
12. Alternativa *b*.
13. Alternativa *e*.
14. Alternativa *a*.
15. Alternativa *c*.
16. Alternativa *b*.

**Atualidades em foco p. 116**

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal.

• Pesquisa do aluno.

| Palavra | Significado |
|---|---|
| BANZÉ | Confusão, barulho. |
| BIBOCA | Casa, lugar sujo. |
| CAFUNÉ | Ato de coçar, de leve, a cabeça de alguém, dando estalidos com as unhas para provocar sono. |
| CAPENGA | Manco, coxo. |
| FUZUÊ | Algazarra, barulho, confusão. |
| MUCAMA | Criada, escrava de estimação, que ajudava nos serviços domésticos e acompanhava sua senhora à rua, em passeios. |
| ZABUMBA | Bombo. |

- Resposta pessoal.
- Pesquisa do aluno.

# UNIDADE 4

## Relações entre ângulos

### Atividades p. 122

1. a) 10°
   b) Cada um dos ângulos mede 60°.
2. 45°
3. a) $x = 60°$; $y = 135°$.
   b) $x = 30°$; $y = 210°$.
4. 16,8°
5. Alternativa *a*.
6. Alternativa *b*.

### Atividades p. 126

1. 15°
2. Alternativa *c*.
3. Alternativa *a*.
4. Alternativa *c*.
5. Alternativa *e*.
6. Alternativa *b*.
7. a) 15°
   b) $a = 35°$ e $b = 55°$.
   c) 180°
   d) $B\hat{A}C$ é agudo, $A\hat{B}C$ é agudo e $A\hat{C}B$ é reto.
   e) Complementares.

### Atividades p. 130

1. 9 cm
2. $x = 90°$ e $y = 60°$
3. $2x + y$
4. a) 3 cm
   b) 15 cm
   c) 15 cm
   d) 44 cm
5. a) 20 cm
   b) 3 cm
6. a) $a = 11$ cm, $b = 25$ cm e $c = 31$ cm
   b) 134 cm
7. a) 2
   b) 8
   c) $2a + 16$
   d) 16

### Atividades p. 132

1. a) $med(\overset{\frown}{AB}) = 75°$; $med(\overset{\frown}{ACB}) = 285°$.
   b) $med(\overset{\frown}{AB}) = 90°$; $med(\overset{\frown}{ACB}) = 270°$.
2. 80°
3. $x = 45°$; $y = 90°$
4. a) 120°
   b) 45°
5. 120°
6. $x = y = 110°$
7. 20°
8. Sim; caso LLL.

### Atividades p. 136

1. $p = \frac{t}{2}$ ou $t = 2p$.
2. $x = 46°$ e $y = 92°$.
3. 12°
4. $x = 36°$ e $y = 30°$.
5. a) 82°
   b) 41°
6. $x = 40°$, $a = 140°$, $b = 20°$ e $c = 20°$.
7. $s = 104°$ e $t = 38°$.
8. $med(A\hat{O}C) = 168°$ e $med(A\hat{B}C) = 84°$.
9. 60°
10. $med(\overset{\frown}{CD}) = 130°$ e $x = 65°$.
11. $a = 54°$, $b = 101°$, $c = 126°$ e $d = 79°$.
12. a) 60°
    b) 85°
13. 45°

### Tecnologias p. 138

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

### Atividades p.141

1. a) $x = \frac{t + s}{2}$
   b) $x = \frac{t - s}{2}$
2. a) 57°
   b) 18°
3. $a = 30°$, $b = 95°$ e $c = 85°$
4. 87°

### Retomando o que você aprendeu p. 142

1. Alternativa *c*.
2. Alternativa *a*.
3. Alternativa *c*.
4. Alternativa *c*.
5. Alternativa *e*.
6. Alternativa *b*.
7. Alternativa *c*.
8. Alternativa *b*.
9. Alternativa *a*.
10. Alternativa *e*.
11. Alternativa *c*.
12. Alternativa *d*.

# UNIDADE 5

## Proporção e semelhança

### Pense e responda p. 146

1. a) $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$ ou 0,7
   b) $\frac{35}{50} = \frac{7}{10}$ ou 0,7
2. Sim.
3. Sim.

### Atividades p. 148

1. $\frac{2}{5}$ ou 0,4.
2. $\frac{5}{2}$ ou 2,5.
3. 3,2 m.
4. $a = 9$, $b = 15$; $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ ou 0,6.

### Atividades p. 149

1. Sim, pois $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ} = \frac{2}{3}$.
2. 12,8 cm
3. 8 cm
4. Na escala 1 : 1 000 000.

### Atividades p. 153

1. a) 80
   b) 3,6
2. 63 cm
3. 6,9
4. 20
5. 8 ou 0,5
6. $x = 1$ e $y = 9$
7. Lote 1 = 54 metros; lote 3 = 90 metros.
8. 29

### Atividades p. 156

1. 3
2. 127,5
3. $AB = 8$ cm, $AC = 16$ cm, perímetro = 38 cm.
4. $x = 18,75$ cm; $y = 11,25$ cm
5. 7,5
6. Lote 1: 205 m; lote 2: 185 m
7. 60 m e 96 m
8. 3,2 m

### Atividades p. 158

1. a) 5
   b) 2,5
2. $AC = 8$, $BD = 3$ e $DC = 4$.
3. $AD = 6$ cm, $DC = 9$ cm
4. a) 52,5
   b) 40,8

### Atividades p. 163

1. a) Demonstração.
   b) Demonstração.
2. a) Falsa.
   b) Verdadeira.
   c) Falsa.
   d) Verdadeira.
   e) Verdadeira.
3. $\frac{4}{3}$
4. a) 64 cm
   b) 6 cm e 8 cm
5. a) 2
   b) $x = 15$; $y = 20$; $z = 31$
   c) 2
6. a) $\frac{3}{2}$ ou 1,5.
   b) 105°
   c) 1,4 cm

### Atividades p. 166

1. a) Não.
   b) Sim.
   c) Sim.
2. $\hat{B} \cong \hat{E} = 90°$ e $\hat{C} \cong \hat{D} = 50°$.

3. $\frac{x}{z} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = y \cdot z$
4. $x = ab$
5. 28,8 m
6. 125 m

### Atividades p. 169

1. $x = 21{,}6$ e $y = 26{,}4$.
2. $x = 30$ e $y = 40$.
3. 96
4. 3,2
5. 9
6. Alternativa *b*.
7. 250 m
8. 50 m
9. Alternativa *d*.
10. 20,5 m

### Por toda parte p. 171

1. 146 m

### Retomando o que você aprendeu p. 172

1. Alternativa *d*.
2. Alternativa *b*.
3. Alternativa *c*.
4. Alternativa *a*.
5. Alternativa *e*.
6. Alternativa *b*.
7. Alternativa *a*.
8. Alternativa *c*.
9. Alternativa *e*.
10. Alternativa *c*.
11. Alternativa *d*.

# UNIDADE 6

## Porcentagem, probabilidade e estatística

### Atividades p. 178

1. R$ 708,00
2. Alternativa *a*.
3. R$ 30 240,00
4. R$ 6 200,00
5. R$ 2 138,64
6. 100% ao mês
7. Alternativa *c*.
8. R$ 6,83
9. a) R$ 1 932,00 b) R$ 275,00; R$ 412,50

### Atividades p.181

1. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$
2. a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{16}$
3. Alternativa *d*.
4. $\frac{4}{15}$
5. 24%
6. a) $\frac{1}{17}$
   b) $\frac{4}{17}$
7. $\frac{3}{7}$
8. $\frac{1}{36}$
9. É menor, pois $\frac{3}{16} = 18{,}75\%$.
10. 400 rodadas distintas.

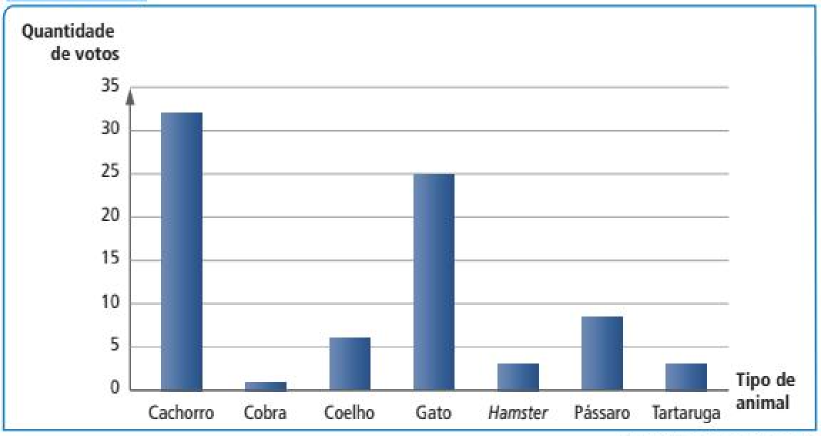
### Por toda parte p. 185

1. a) Em novembro de 2017: cerca de 134 reais por grama; em junho de 2018: cerca de 154 reais por grama.
   b) 19 reais; cerca de 15%.
2. a) Resposta esperada: componentes de um todo.
   b) Resposta esperada: a soma deve dar 100%, como ocorre nesse gráfico.
   c) Resposta esperada: ela indica quantos por cento a Alemanha contribui para o orçamento regular da ONU. Essa porcentagem está dentro dos 31% relativos à contribuição total da União Europeia.

### Atividades p. 186

1. Alternativa *d*.
2. a) Resposta esperada: gráfico de barras ou de colunas, pois compara itens individuais.
   b) Exemplo para o gráfico:

**Animal preferido**




Fonte: Alunos da professora Iara.

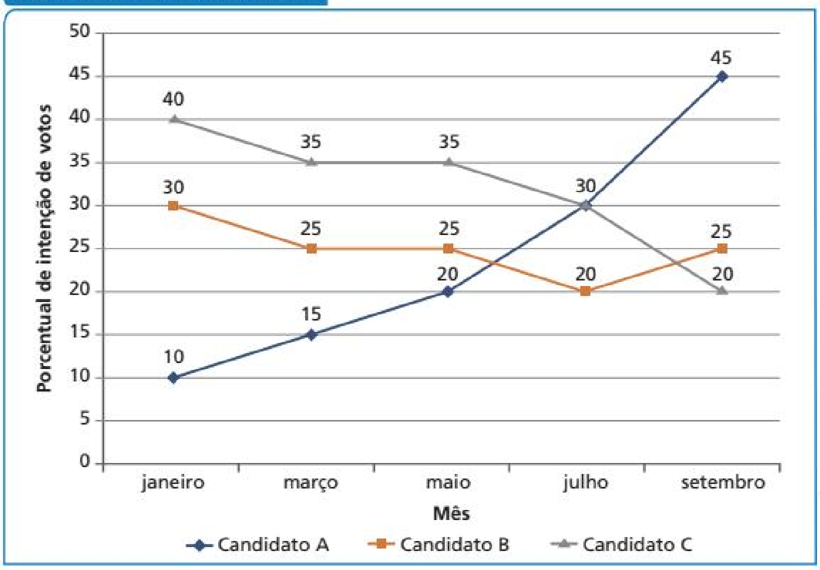
3. a) Resposta esperada: para cada ano (coluna inteira), cada cor representa um dos produtos exportados. De acordo com a legenda, temos: o azul representa as exportações da soja, o laranja, as do café e o roxo, as do milho.
   b) Sim, o milho.
   c) Soja: 2017; café: 2018; milho: 2019.
   d) Em 2017.

### Atividades p. 189

1. Resposta esperada: Sim, pois para mostrar os componentes de um todo um bom gráfico é o de setores e para comparar categorias o gráfico de barras (no caso barras duplas) é adequado.

### Tecnologias p. 190

1. a) **Pesquisa para prefeito – intenções de voto**




Fonte: Instituto de pesquisa.

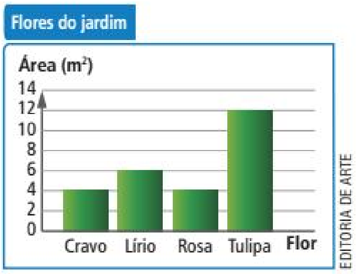
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

   b) Para o candidato *A*, a intenção de voto cresceu mês a mês e, para o candidato *C*, a intenção de voto decresceu mês a mês ou ficou constante (manteve o mesmo percentual), mas não houve crescimento algum.
2. Realização de pesquisa e construção de gráfico.

### Retomando o que você aprendeu p. 192

1. R$ 1 264,00
2. Alternativa *c*.
3. Alternativa *c*.
4. 30%
5. Alternativa *b*.

6. a)




Fonte: Equipe de jardinagem.

b) 6,5 m²

7. a) 20 meninas. c) 35 alunos.
b) 9A; 25 meninos.
d) Apenas na turma 9A.

8. a) A evolução de seu faturamento ao longo do tempo (de 2009 a 2019).
b) Sim, o gráfico de linhas é um gráfico mais adequado para enfatizar as mudanças dos dados ao longo do tempo.
c) Resposta esperada: Sim, inicialmente o período é de 2 em 2 anos, mas o último período é de 4 anos, o que acentua o crescimento do último período.

9. Resposta pessoal.

### Atualidades em foco p.194

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.
4. a) Depende do número de habitantes no Brasil.
b) • Que o percentual de homens é maior que o percentual de mulheres.
• Que o percentual de homens é praticamente o mesmo que o percentual de mulheres.
• Que o percentual de mulheres é maior do que o de homens.

# UNIDADE 7

## Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência

### Pense e responda p. 198

1. a) $A_1 = 6{,}25$ cm² d) $A_1 = A_2 + A_3$
b) $A_2 = 4{,}00$ cm² e) Sim.
c) $A_3 = 2{,}25$ cm²

### Para quem quer mais p. 203

• 12 côvados.

### Atividades p. 204

1. Como $26^2 = 24^2 + 10^2$, o triângulo é retângulo.
2. a) 35 b) 7 c) $2\sqrt{5}$ d) 2
3. a) $2\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{5}$ c) 10 d) 28
4. 4,9 cm
5. a) 45 b) 51
6. $9\sqrt{5}$
7. a) 20 b) $12\sqrt{10}$
8. $a + b + c = 7{,}0$
9. a) 10 km b) 5 horas
10. 24 cm e 18 cm
11. a) 63,2 m b) 31,6 m
12. 25 m
13. 4 m
14. 9 m

### Atividades p. 208

1. a) $12\sqrt{2}$ cm b) $12\sqrt{2}$ cm
2. $20\sqrt{2}$ cm
3. $\ell = 15$ cm; perímetro $= 60$ cm
4. 33,84 cm
5. 800 cm²
6. a) $10\sqrt{2}$ cm
b) $40\sqrt{2}$ cm
c) 200 cm²
7. $12\sqrt{3}$ cm
8. 10,38 cm
9. 30 cm
10. 15,57 cm²
11. $5\sqrt{6}$ cm
12. 103,8 cm
13. $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

### Atividades p. 212

1. $m = 4$, $n = 12$
2. $b = 18$; $h = 12\sqrt{2}$
3. $a = 34$, $n = 25$
4. $a = 100$ mm; $h = 48$ mm; $b = 80$ mm; $c = 60$ mm
5. a) 20 cm c) $5\sqrt{3}$ cm
b) $10\sqrt{3}$ cm
6. 280 cm
7. $x = 6$ cm; $y = 2\sqrt{13}$ cm; $z = 3\sqrt{13}$ cm
8. 48 km
9. $x = 25$ cm

### Por toda parte p. 213

1. Aproximadamente 28,97 m.
2. Cerca de 148 m.

### Pense e responda p. 214

a) Resposta pessoal. c) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

### Atividades p. 216

1. 226,08 cm
2. 125,6 cm
3. $r = 45$ cm; $C = 282{,}6$ cm
4. 50 m
5. O segundo é o mais barato, pois $203\,040 < 228\,420$.
6. Aproximadamente 26,17 cm.
7. 80 m
8. 10,99 cm
9. Aproximadamente 100 m.
10. Aproximadamente 239,3 cm.
11. Aproximadamente 1 672 voltas.
12. Aproximadamente 2,39 km.

### Atividades p. 219

1. a) 6 c) 8
b) 10 d) 9
2. 19
3. $6\sqrt{3}$
4. a) 4
b) $AB = 17$; $CD = 19$
5. $4\sqrt{10}$ cm
6. 16 cm e 2 cm.
7. a) 18 cm b) 10 cm
8. 12 cm

### Retomando o que você aprendeu p. 220

1. Alternativa *a*.
2. Alternativa *d*.
3. Alternativa *c*.
4. Alternativa *b*.
5. Alternativa *a*.
6. Alternativa *d*.
7. Alternativa *a*.
8. Alternativa *e*.
9. Alternativa *a*.
10. Alternativa *d*.

# UNIDADE 8

## Figuras planas, espaciais e vistas

### Pense e responda p. 224

1. O triângulo equilátero é um polígono de três lados com mesma medida e os três ângulos internos de 60°. O quadrado é um quadrilátero de quatro lados de mesma medida e quatro ângulos internos de 90°.
2. Um polígono regular é aquele que tem todos os lados com a mesma medida e todos os ângulos internos congruentes entre si. O triângulo equilátero e o quadrado são polígonos regulares.
3. Como a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360° e um polígono regular tem todos os ângulos externos de mesma medida, a medida $a_e$ de cada ângulo externo de um polígono regular de *n* lados é dada por: $a_e = \dfrac{360°}{n}$. Então, a medida do ângulo externo de um triângulo equilátero é 120° e de um quadrado é 90°.

### Atividades p. 227

1. a) $a_c = 120°$ e $a_i = 60°$
b) $a_c = 90°$ e $a_i = 90°$
c) $a_c = 60°$ e $a_i = 120°$
d) $a_c = 45°$ e $a_i = 135°$
2. $x = 10$ cm
3. $5\sqrt{3}$ cm
4. $8\sqrt{2}$ cm
5. $3{,}535\sqrt{2}$ cm e 3,535 cm

### Atividades p. 230

1. a) $40\sqrt{2}$ cm c) $40\sqrt{3}$ cm
b) 40 cm
2. Quadrado: 70 cm; triângulo equilátero: 85 cm
3. 3 872 cm²
4. 43,25 cm
5. a) 120° c) 4,5 cm
b) $9\sqrt{3}$ cm d) 13,5 cm
6. 46,625 cm
7. Resposta pessoal.
8. a) 3 cm c) 7,28 cm
b) 4,28 cm
9. 82,35%
10. 2 076 cm²
11. a) $\ell = 13{,}6$ cm e $P = 40{,}8$ cm
b) $a = 6{,}8$ cm e $P = 48$ cm

### Atividades p. 233

1. a) 240 cm c) 16 608 cm²
b) $40\sqrt{3}$ ou 69,2 cm
2. a) 18 cm c) $9\sqrt{3}$ cm
b) 54 cm d) $486\sqrt{3}$ cm²
3. 5 024 cm²
4. 25,12 cm²
5. 113,04 cm²
6. 94,20 cm²
7. 32,86 m²
8. Sim, pois 170 m² > 139,25 m².
9. a) 0,4 m
b) 0,5024 m²

### Tratamento da informação p. 234

1. 22,6 milhões de toneladas.

2. Região Norte, com uma produção de 9,04 milhões de toneladas.

3. **Distribuição de frequência da participação na produção nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas por grande região**

| Grande Região | Produção (em milhões de toneladas) |
|---|---|
| Centro-Oeste | 9,94 |
| Sul | 7,46 |
| Sudeste | 2,26 |
| Nordeste | 2,04 |
| Norte | 0,90 |

Fonte: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Producao_Agricola/Levantamento_Sistematico_da_Producao_Agricola_[mensal]/Fasciculo/2017/lspa_201701.pdf>.

4. A produção média por região é de 45,2 milhões de toneladas.
5. 36%
6. Setor azul; a soja; a mais da metade (52% > 50%).

### Atividades p. 237

1. a) A = (–3, 4), B = (–5, 2) e C = (–1, 2)
   b) D = (–4, 3) e E = (–2, 3)
   c) $2 + 2\sqrt{2}$ (u.c.)
   d) Triângulo isósceles; área: 1 (u.a.).
2. $\sqrt{29}$ (u.c.)
3. Resposta pessoal.

### Atividades p. 241

1. Afirmação falsa, pois se o segmento estiver sobre uma reta que é perpendicular ao plano, a projeção ortogonal do segmento será apenas um ponto.
2. Alternativa *c*.
3. Amarelo: vista frontal; laranja: vista superior e verde: vista lateral.

### Atividades p. 243

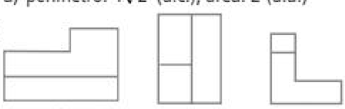
1. Um prisma triangular reto e um prisma pentagonal reto. O volume do primeiro é dado pela área do triângulo da base multiplicada pela altura do prisma. O volume do segundo é dado pelo produto da área do pentágono regular pela altura do prisma.
2. a) Essa estrutura tem a forma de um prisma reto triangular.
   b) 810 m³
3. a) A forma de um cilindro.
   b) 1 125 cm³
4. Alternativa *b*.
5. 114,4 cm³

### Retomando o que aprendeu p. 244

1. Respostas pessoais.
2. Alternativa *a*.
3. Alternativa *b*.
4. Alternativa *d*.
5. Alternativa *c*.
6. Alternativa *b*.
7. Alternativa *c*.
8. Alternativa *d*.
9. Alternativa *b*.

9. a) Construção de figura; (1, 0) e (–1, 0).
   b) (0, 2)
   c) N = (1, 1), O = (0, 0) e P = (–1, 1)
   d) perímetro: $4\sqrt{2}$ (u.c.); área: 2 (u.a.)

11.



Vista frontal  Vista superior  Vista lateral

12. 775 cm²

# UNIDADE 9

## Função

### Atividades p. 250

1. y = 200 + 45x
2. a) $y = \frac{1}{x}$
   b) $y = x^2 - 4$
   c) $y = \frac{1}{2}x + 5$

3.

| Idade dos filhos | *Camping* do Sol | *Camping* dos pássaros |
|---|---|---|
| x < 5 | 406 | 728 |
| y < 5 e 5 ⩽ x < 15 | 609 | 728 |
| y < 5 e x ⩾ 15 | 609 | 756 |
| y ⩾ 5 e x < 15 | 812 | 728 |
| 5 ⩽ y < 15 e x ⩾ 15 | 812 | 756 |
| y ⩾ 15 | 812 | 784 |

4. a) 0,4x
   b) 50 mil reais.

### Educação Financeira p. 251

1. a) R$ 600,00
   b) R$ 5 400,00
   c) Diferença de R$ 1 772,68, que corresponde a cerca de 32,8% dos R$ 5 400,00 economizados.

### Atividades p. 253

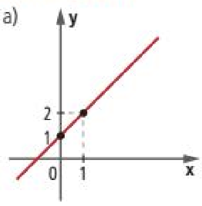
1. –7
2. $x = \frac{1}{2}$
3. a)

| x | y = 4x |
|---|---|
| 5 cm | 20 cm |
| 7,2 cm | 28,8 cm |
| 11 cm | 44 cm |
| 20,5 cm | 82 cm |
| $10\sqrt{3}$ cm | $40\sqrt{3}$ cm |

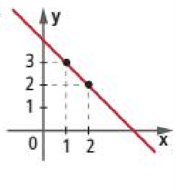
   b) $40\sqrt{3}$
   c) 11
   d) Sim, pois sua lei é do tipo y = ax (com a ≠ 0 e b = 0). As grandezas perímetro e medida do lado de um quadrado são grandezas diretamente proporcionais.

### Atividades p. 255

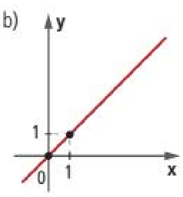
1. a)



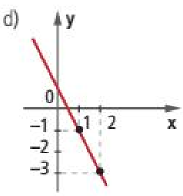
c)



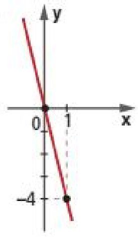
b)



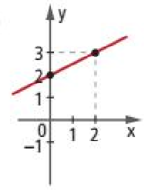
d)



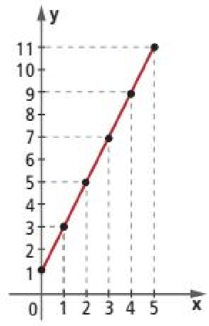
e)



f)



2. (1, 1)
3. São paralelas.
4.



5. (4, 2)

### Atividades p. 256

1. a) x = 6
   b) x = –4
   c) x = 10
   d) $x = \frac{3}{2}$
   e) $x = \frac{1}{5}$
   f) x = –6
2. a) x = –1
   b) x = 3
   c) x = 2

### Por toda parte p. 257

1. a) y = 50 + 275x
   b) 12 toalhas.
2. a) Ao final do 4º mês.
   b) O artesão teve prejuízo de 220 reais.

### Tratamento da informação p. 258

1. Desorientação; perda do julgamento crítico; perda de memória; tempo de reação aumentado.
2. Mais de 11 latas.
3. Em uma festa.
4. Não.
5. **Percentual de alunos do sexo feminino, segundo o local ou forma que foi adquirida a bebida**


Fonte: <biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv64436.pdf>. Acesso em: 20 maio 2015.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

## Atividades p. 262

1. $y = x^2 + x$
2. $y = x^2 - 5x + 25$
3. $-24$
4. $-2$
5. a) 500 500
   b) 11
6. a) 10 000
   b) 16
   c) 31
7. a) $f = 0,7$ e $g = 0,85$
   b) Sim, $t = 2$.
   c) Para $t = 4$, temos que $f = 2,8$ e $g = 1,6$. Portanto, *f* assume maior valor.
8. a)

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Total de quadradinhos | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 |
| Quadradinhos roxos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Quadradinhos azuis | 0 | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 |

   b) $n^2$; $n^2 - n$; n
   c) $y = n^2 - n$

## Atividades p. 264

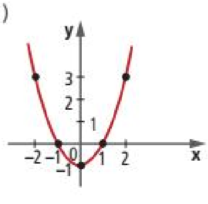
1. a) $(-3, -1)$
   b) $(1, -9)$
   c) $(4, 1)$
   d) $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$
   e) $(-3, 2)$
   f) $(0, 36)$
   g) $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$
   h) $(5, -1)$
   i) $(1, -3)$
   j) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
2. a) Depois de 5 dias.
   b) Depois de 15 dias.

## Atividades p. 266

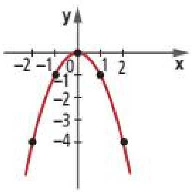
1. a) Intercepta nos pontos (6, 0) e (−4, 0).
   b) Intercepta apenas no ponto (3, 0).
   c) Intercepta nos pontos (2, 0) e (7, 0).
   d) Não intercepta o eixo *x*.
2. a) −5 e 5.
   b) 0 e 6.
   c) −2 e 3.
   d) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$.
   e) $\frac{1}{2}$
   f) 0 e −1.
3. a) (−4, 0) e (4, 0).
   b) (6, 0)
   c) (0, 0) e (7, 0).

## Atividades p. 269

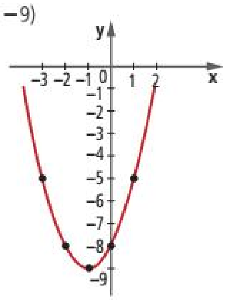
1. a) $a = 1 > 0$; para cima.
   b) $a = 3 > 0$; para cima.
   c) $a = -1 < 0$; para baixo.
   d) $a = -6 < 0$; para baixo.
2. a) $a > 0$ e $\Delta < 0$.
   b) $a < 0$ e $\Delta > 0$.
3. a) $V(0, -1)$



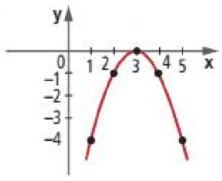
   b) $V(0, 0)$



   c) $V(-1, -9)$



   d) $V(3, 0)$



## Atividades p. 271

1. a) Ponto de mínimo; (4, −10).
   b) Ponto de máximo; (2, 9).
   c) Ponto de máximo; $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
   d) Ponto de mínimo; (0, −16).
   e) Ponto de mínimo; (2, −49).
   f) Ponto de mínimo; (−1, −3).
   g) Ponto de máximo; (0, 9).
   h) Ponto de mínimo; $\left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right)$
2. (1, −5)
3. (2, 4)

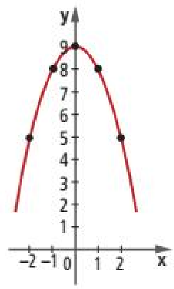
## Tecnologias p. 272

1. A parábola vai se fechando com relação ao eixo *y*.
2. A origem do plano cartesiano, V(0, 0).
3. A parábola vai se fechando com relação ao eixo *y*.
4. A origem do plano cartesiano, V(0, 0). O coeficiente *a* é responsável pela abertura e pela concavidade para parábola. Quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo; quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.
5. O vértice do gráfico se desloca para a esquerda.
6. O vértice do gráfico se desloca para a direita. A variação em *b* determina a posição do vértice e indica se o ponto de intersecção do gráfico com o eixo *y* ocorre em seu trecho crescente ou decrescente.
7. O gráfico se desloca para cima.
8. O gráfico se desloca para baixo. O coeficiente indica o ponto onde o gráfico da função quadrática intercepta o eixo das ordenadas (y) e que associe isso ao fato de que $f(0) = c$.

## Retomando o que aprendeu p. 274

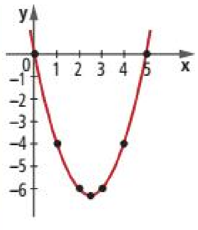
1. a) R$ 10,48
   b) 12 km
2. a) $x = 2$
   b) $x < 2$
   c) $x > 2$
3. Resposta pessoal.
4. Alternativa *e*.
5. a) V (0, 9)

| x | y |
|---|---|
| −2 | 5 |
| −1 | 8 |
| 0 | 9 |
| 1 | 8 |
| 2 | 5 |



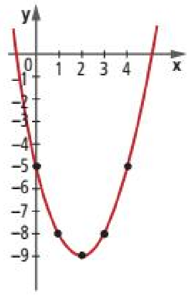
   b) $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | −4 |
| 2 | −6 |
| 3 | −6 |
| 4 | −4 |
| 5 | 0 |



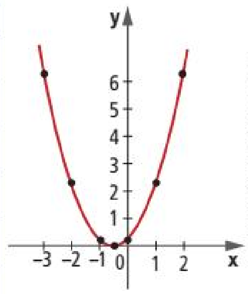
   c) V (2, −9)

| x | y |
|---|---|
| 0 | −5 |
| 1 | −8 |
| 2 | −9 |
| 3 | −8 |
| 4 | −5 |



   d) $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

| x | y |
|---|---|
| −3 | $\frac{25}{4}$ |
| −2 | $\frac{9}{4}$ |
| −1 | $\frac{1}{4}$ |
| 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{9}{4}$ |
| 2 | $\frac{25}{4}$ |



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

6. Alternativa *b*.
7. Alternativa *b*.
8. $k > 3$
9. a) Ponto de mínimo; (0, −25).
   b) Ponto de máximo; (0, 25).
   c) Ponto de máximo; (5, 25)
   d) Ponto de mínimo; $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
10. Alternativa *d*.
11. a) Para $x = -3$ ou $x = 3$.
    b) Para *x* real, com $-3 < x < 3$.
    c) Para *x* real, com $x < -3$ ou $x > 3$.
12. Alternativa *b*.
13. a) $1 < x < 6$
    b) (6, 0)
14. Verdadeira.
15. Alternativa *b*.

## Atualidade em foco p. 276

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.
4. a) Resposta pessoal.
   b) Sim, podemos afirmar que o preço varia em função do consumo. Considerando *y* o preço a ser pago e *x* o consumo mensal, em kWh, podemos estabelecer a seguinte função: $y = 0,45x$.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ASOCIACIÓN DE MAESTROS ROSA SENSAT. **Didáctica de los números enteros**. Madrid: Nuestra Cultura, 1980.

BERLOQUIN, Pierre. **100 jogos geométricos**. Tradução Luís Filipe Coelho e Maria do Rosário Pedreira. Lisboa: Gradiva, 1991.

BORDENAVE, Juan Díaz; PEREIRA, Adair Martins. **Estratégias de ensino-aprendizagem**. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 1985.

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. v. 6. São Paulo: CAEM-USP, 1995. (Coleção Ensino Fundamental).

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação; Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais gerais da educação básica**. Brasília, DF: SEB: Dicei, 2013.

BRUNER, Jerome S. **O processo da educação**. Tradução Lobo L. de Oliveira. 4. ed. São Paulo: Nacional, 1974.

CAGGIANO, Angela et al. **Problema não é mais problema**. v. 4. São Paulo: FTD, 1996.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça (Coord.). **Transformando a prática das aulas de Matemática**: textos preliminares. São Paulo: Proem, 2001.

CAZOLA, Irene; SANTANA, Eurivalda (Org). **Do Tratamento ao levantamento estatístico**. Itabuna: Via Litterarum, 2009.

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. São Paulo: Scipione, 1994.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D'AMBROSIO, Ubiratan (execução do projeto); BASTOS, Almerindo Marques (Coord.). **Geometria experimental**: livro do professor. Rio de Janeiro: PREMEN – MEC/IMECC – UNICAMP, 1985.

D'AMBROSIO, Ubiratan (execução do projeto); BASTOS, Almerindo Marques (Coord.). **Geometria experimental**: 5ª série. Rio de Janeiro: PREMEN – MEC/IMECC – UNICAMP, 1985.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Ática, 1989.

DIENES, Zoltan P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática**. São Paulo: EPU, 1975.

DIENES, Zoltan P. **Frações**. São Paulo: Helder, 1971.

DIENES, Zoltan P. **Lógica y juegos lógicos**. Madrid: Distein, 1975.

DIENES, Zoltan P.; GOLDING, E. W. **Conjuntos, números e potências**. São Paulo: EPU, 1974.

DIENES, Zoltan P.; GOLDING, E. W. **Exploração do espaço e prática da medição**. São Paulo: EPU, 1984.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **O conceito de ângulo e o ensino de geometria**. v. 3. São Paulo: CAEM-USP, 1993. (Coleção Ensino Fundamental).

FUNBEC/CAPES. **Revista do Ensino de Ciências**. São Paulo, março de 1985.

HAYDT, Regina Cazaux. **Avaliação do processo ensino aprendizagem**. São Paulo: Ática, 1988.

HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Educação & Realidade, 1993.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução Stella M. de Freitas Senra. 4. ed. São Paulo: Globo, 1992.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRJ. **Tratamento da informação**: explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais. Rio de Janeiro, 1997.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**. São Paulo: Cortez, 1990.

MATAIX, Mariano Lorda. **Divertimientos lógicos y matemáticos**. Barcelona: Marcombo, 1979.

MATAIX, Mariano Lorda. **El discreto encanto de las matemáticas**. Barcelona: Marcombo, 1988.

MATAIX, Mariano Lorda. **Nuevos divertimientos matemáticos**. Barcelona: Marcombo, 1982.

OCHI, Fusako Hori et al. **O uso de quadriculados no ensino de geometria**. v. 1. São Paulo: CAEM-USP, 1992. (Coleção Ensino Fundamental).

PERELMÁN, Y. **Matemáticas recreativas**. Tradução F. Blanco. 6. ed. Moscou: Mir, 1985.

PIAGET, Jean. **Fazer e compreender Matemática**. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RATHS, Louis E. et al. **Ensinar a pensar**. São Paulo: Herder/Edusp, 1972.

ROCHA-FILHO, Romeu C. **Grandezas e unidades de medida**: o sistema internacional de unidades. São Paulo: Ática, 1988.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Revista do Professor de Matemática 33**. Rio de Janeiro, 1977.

SOUZA, Eliane Reame et al. **A Matemática das sete peças do tangram**. São Paulo: CAEM-USP, 1995. (Coleção Ensino Fundamental).

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente**. Lisboa: Antídoto, 1979.

ZARO, M.; HILLERBRAND, V. **Matemática instrumental e experimental**. Porto Alegre: Fundação para o Desenvolvimento de Recursos Humanos, 1984.

ISBN 978-85-96-01919-4
9 788596 019194